Feuille d'exercices 9.
Corrigé d'un exercice.

Exercice 9.22 :

Remarque : même si ce n'est pas demandé, voici un procédé de construction du point E : il est situé sur le cercle de diamètre $[A, B]$ pour garantir que le triangle ABE est rectangle en E et il est situé sur la médiatrice des deux points (A, B) (c'est-à-dire la droite passant par le milieu de (A, B) et orthogonale à $\overrightarrow{AB}$) pour garantir que le triangle ABE est isocèle en E. L'intersection du cercle et de la médiatrice donne deux points. On choisit E parmi ces points de sorte que le triangle ABE soit direct.
On construit de même les points F, G et H.

Sur un dessin (à faire) représentant le triangle ABE, on voit que B est l'image de A par la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc en passant aux affixes, $z_B = i(z_A - z_E) + z_E$.
Ainsi, $(1-i)z_E = z_B - iz_A$, puis $z_E = \dfrac{1-i}{2}z_A + \dfrac{1+i}{2}z_B$. De même, on obtient
$z_F = \dfrac{1-i}{2}z_B + \dfrac{1+i}{2}z_C$,
$z_G = \dfrac{1-i}{2}z_C + \dfrac{1+i}{2}z_D$,
$z_H = \dfrac{1-i}{2}z_D + \dfrac{1+i}{2}z_A$.
Ainsi, $z_G - z_E = \dfrac{1-i}{2}(z_C - z_A) + \dfrac{1+i}{2}(z_D - z_B)$ et
$z_H - z_F = \dfrac{1-i}{2}(z_D - z_B) + \dfrac{1+i}{2}(z_A - z_C)$.
Mais $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc
$e^{i\frac{\pi}{2}}(z_G - z_E) = \dfrac{1+i}{2}(z_C - z_A) - \dfrac{1-i}{2}(z_D - z_B) = z_F - z_H$.
Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{HF}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{EG}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc ces deux vecteurs sont bien orthogonaux et de même norme.