

DM 21 : un corrigé

Problème 1 : Dénombrement et séries entières

Partie I : Un résultat sur les séries entières

1°)

◇ Supposons que $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-1, 0[$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}$, donc la série $\sum a_n x^n$ est bien convergente et $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

◇ On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n} = 1$ et $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$. Soit $x \in]-1, 0[$. Soit $N \in \mathbb{N}$. En partitionnant la somme selon la valeur modulo 3

des indices, on a $\sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} a_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{3} \rfloor} a_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-2}{3} \rfloor} a_{3n+2} x^{3n+2}$, donc

$\sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} x^{3n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x^3}$, d'après le point précédent. Ainsi l'hypothèse est bien vérifiée et dans ce cas, $S(x) = \frac{1}{1-x^3}$.

◇ On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$. Soit $x \in]-1, 0[$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$\sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^N t^n \right) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1-t^{N+1}}{1-t} dt = -\frac{1}{x} \ln(1-x) + r_N(x)$,

où $r_N(x) = \frac{-1}{x} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1-t} dt$. Or d'après l'inégalité triangulaire, en tenant compte du fait

que $1-t > 0$ et que $x < 0$, $|r_N(x)| \leq \frac{1}{|x|} \int_x^0 \frac{|x|^{N+1}}{1-t} dt = |x|^N \ln(1-x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, donc

d'après le principe des gendarmes, $r_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, puis $\sum_{n=0}^N a_n x^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \ln(1-x)$.

Ceci prouve que l'hypothèse de l'énoncé est bien vérifiée et que $S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$.

2°) Soit $x \in]-1, 0[$. D'après le cours, $a_n x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la suite $(a_n x^n)$ est bornée.

Plus en détail, $a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x) - S(x) = 0$, donc avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leq \varepsilon = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leq M$, où $M = \max(1, \max_{0 \leq k \leq N} |a_k x^k|)$.

3°) Il existe $y \in]-1, x[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [x, 0[$.

$\left| \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \leq \sum_{n=0}^N |a_n| |t|^n \leq \sum_{n=0}^N |a_n| |x|^n = \sum_{n=0}^N |a_n y^n| \left| \frac{x}{y} \right|^n$, or d'après la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n y^n| \leq M$, donc

$\left| \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \leq \sum_{n=0}^N M \left| \frac{x}{y} \right|^n = M \frac{1 - \left| \frac{x}{y} \right|^{N+1}}{1 - \left| \frac{x}{y} \right|} \leq M \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{y} \right|}$. Ce majorant ne dépend pas de

N , donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $|S(t)| \leq M \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{y} \right|}$, ce qui permet de conclure, car ce majorant ne dépend pas de t .

4°) Soit $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=0}^N a_n x^n - a_0 = x \sum_{n=1}^N a_n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} x^n$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que la série $\sum a_{n+1} x^n$ converge

et que $S(x) - a_0 = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n$.

En particulier, on a montré que, pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum a_{n+1} x^n$ converge, donc on peut lui appliquer la question précédente : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n \right| \leq M$. Ainsi, $|S(x) - a_0| \leq |x| M \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et le principe des gendarmes permet de conclure.

5°) Soit $x \in]-1, 0[$. Posons $R(x) = \frac{S(x) - S(0)}{x - 0}$: il s'agit de montrer que $R(x)$ possède une limite réelle lorsque x tend vers 0.

$R(x)$ est la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $R_N(x) = \frac{1}{x} (-a_0 + \sum_{n=0}^N a_n x^n)$,

or $R_N(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^N a_n x^n = \sum_{n=1}^N a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} x^n$, donc $R(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n$.

Ainsi, la série $\sum a_{n+1} x^n$ converge pour tout $x \in]-1, 0[$, donc on peut lui appliquer la question précédente : $R(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_1$.

Ceci prouve que S est bien dérivable en 0 et que $S'(0) = a_1$.

6°) Le sens indirect étant évident, supposons que pour tout $x \in]-1, 0[$, $S(x) = 0$. Pour $n = 0$, $0 = S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

donc d'après l'unicité de la limite et la question précédente, $a_0 = 0$.
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_k = 0$.
 Alors, pour tout $x \in]-1, 0[$,

$$\begin{aligned} 0 = S(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^N a_h x^h = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ N \geq n}} \sum_{h=n}^N a_h x^h \\ &= x^n \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ N \geq n}} \sum_{h=n}^N a_h x^{h-n} = x^n \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ N \geq n}} \sum_{h=0}^{N-n} a_{h+n} x^h \\ &= x^n \sum_{h=0}^{+\infty} a_{n+h} x^h. \end{aligned}$$

Or $x^n \neq 0$, donc pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum_h a_{n+h} x^h$ converge et sa somme, notée

$R(x)$, est nulle. Mais d'après la question précédente, $R(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_n$, donc $a_n = 0$.

D'après le principe de récurrence forte, on a montré que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : Application au dénombrement

7°) On suppose que $pq > n$.

Supposons qu'il existe $(n_1, \dots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p$ tel que $\sum_{i=1}^p n_i = n$.

Alors $n = \sum_{i=1}^p n_i \leq \sum_{i=1}^p q = pq$, ce qui est faux.

Ainsi, $\{(n_1, \dots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p / \sum_{i=1}^p n_i = n\} = \emptyset$ et $B_q(n, p) = 0$.

8°) On suppose que $q \geq n$ et $p \geq 1$.

Posons $A = \{(n_1, \dots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p / \sum_{i=1}^p n_i = n\}$

et $B = \{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p / \sum_{i=1}^p n_i = n\}$. A est clairement inclus dans B , mais si

$(n_1, \dots, n_p) \in B$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $n_i = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} n_j \leq n \leq q$, donc

$(n_1, \dots, n_p) \in A$. Ainsi $A = B$ et $B_q(n, p) = |B|$. On reconnaît alors qu'il s'agit du nombre de combinaisons de n éléments choisis parmi \mathbb{N}_p avec répétitions.

Si $a = (n_1, \dots, n_p) \in B$, notons $s_a = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{p, \dots, p}_{n_p \text{ fois}})$. Alors l'application

$a \mapsto s_a$ est une bijection de B dans l'ensemble \mathcal{S} des suites croissantes $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ constituées de n entiers entre 1 et p , dont l'application réciproque est

$(s_k)_{1 \leq k \leq n} \mapsto (|\{k \in \mathbb{N}_n / s_k = i\}|)_{1 \leq i \leq p}$.

Mais l'application $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto (s_i + i - 1)_{1 \leq i \leq n}$ est une bijection de S dans l'ensemble S' des suites strictement croissantes constituées de n entiers entre 1 et $n + p - 1$. Ainsi $B_q(n, p) = |S'|$. Or pour choisir un élément $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans S' , il suffit de choisir $\{s_i / i \in \mathbb{N}_n\}$ dans \mathbb{N}_{n+p-1} , soit $\binom{n+p-1}{n}$ choix, puis d'ordonner cet ensemble. Ceci démontre que $B_q(n, p) = \binom{n+p-1}{n}$.

9°) $A^p = \left(\sum_{i_1=0}^q X^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^q X^{i_2} \right) \times \dots \times \left(\sum_{i_p=0}^q X^{i_p} \right)$, donc par distributivité généralisée,

$$A^p = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in [0, q]^p} X^{i_1} X^{i_2} \dots X^{i_p},$$

puis par sommation par paquets, $A^p = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \in [0, q]^p \\ i_1 + \dots + i_p = n}} X^n = \sum_{n \geq 0} B_q(n, p) X^n$.

10°) $\sum_{n \geq 0} B_q(n, p+1) X^n = A^{p+1} = \left(\sum_{m \geq 0} B_q(m, p) X^m \right) \times \left(\sum_{i=0}^q X^i \right)$,

donc $\sum_{n \geq 0} B_q(n, p+1) X^n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ m \geq 0}} B_q(m, p) X^{m+i} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ m \geq 0, m+i=n}} B_q(m, p) X^n$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} B_q(n, p+1) X^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ n-i \geq 0}} B_q(n-i, p) \right) X^n$, ce qui permet de conclure, par unicité des coefficients d'un polynôme.

11°)

◇ Notons f cette application. Par récurrence sur n , on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$: pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!(1-x)^{p+n}}$.

En effet, c'est clair pour $n = 0$ et si c'est vrai à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, alors en dérivant $R(n)$ on obtient bien $R(n+1)$.

◇ Fixons $x \in]-1, 0[$. L'application f est de classe C^∞ . Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut donc appliquer l'égalité de Taylor avec reste intégral : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

Ainsi, en posant $M = \sup_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)|$, par inégalité triangulaire,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| M dt = M \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0 = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

En effet, $x < 0$ donc dans l'inégalité triangulaire, c'est bien \int_x^0 qui intervient.

De plus lorsque $t \in [x, 0]$, $|x-t| = t-x$, donc une primitive de $\left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right|$ est bien

$$\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit $t \in [0, x]$. $f^{(n+1)}(t) = \frac{(p+n)!}{(p-1)!(1-t)^{p+n+1}}$, or $1-t \geq 1$, car $x \leq 0$, donc

$|f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!}$, puis par passage au sup, $M \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!}$ (en effet, la borne supérieure est le plus petit des majorants). On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} x^k \right| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} |x|^{n+1} \times (p+n)(p+n-1) \cdots (n+2) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)!} |x|^{n+1} n^{p-1} : \end{aligned}$$

On a pour le moment peu parlé de cette notion d'équivalent pour des suites de réels. Lorsque (x_n) et (y_n) sont deux suites non nulles de réels, on dit que x_n est équivalent à y_n lorsque n tend vers $+\infty$ et on écrit $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n$ si et seulement si $\frac{x_n}{y_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

On va utiliser ensuite la propriété suivante : si $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n$ et si $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$. En effet, dans ce cas, on peut écrire $x_n = \frac{x_n}{y_n} \times y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

D'après les croissances comparées, sachant que $|x| < 1$, $n^{p-1}|x|^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes et nos considérations sur les équivalents,

$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} x^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{p+k-1}{k} x^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Ceci prouve

que la série $\sum \binom{p+n-1}{n} x^n$ converge et a pour somme $f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

12°) Soit $x \in]-1, 1[$.

◇ D'après le cours, $A(x) = \sum_{i=0}^q x^i = \frac{1-x^{q+1}}{1-x}$, donc

$A(x)^p = \frac{(1-x^{q+1})^p}{(1-x)^p}$, puis d'après la question précédente et la formule du binôme de

Newton, $A(x)^p = \left(\sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-x^{q+1})^h \right) \times \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+p-1}{m} x^m \right)$, ce qui permet de

conclure.

◇ Par distributivité,

$$\begin{aligned}
A(x)^p &= \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+p-1}{p-1} x^{h(q+1)+m} \\
&= \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^N \binom{m+p-1}{p-1} x^{h(q+1)+m} \\
&= \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=h(q+1)}^{N+h(q+1)} \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1} x^n,
\end{aligned}$$

en posant $n = m + h(q+1)$. Ainsi,

$$[A(x)]^p = \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h \sum_{n=h(q+1)}^{+\infty} \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1} x^n = \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,h} x^n,$$

en convenant que pour tout $h \in \{0, \dots, p\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $a_{n,h} = 0$ si $n < h(q+1)$ et $a_{n,h} = \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1}$ lorsque $n \geq h(q+1)$. Alors, en passant à nouveau aux sommes partielles,

$$\begin{aligned}
[A(x)]^p &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h \sum_{n=0}^N a_{n,h} x^n \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\sum_{h=0}^p \binom{p}{h} (-1)^h a_{n,h} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{0 \leq h \leq p \\ tq \leq h(q+1) \leq n}} \binom{p}{h} (-1)^h a_{n,h} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{h=0}^{\min(p, \lfloor \frac{n}{q+1} \rfloor)} \binom{p}{h} (-1)^h \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1} \right) x^n.
\end{aligned}$$

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = B_q(n, p) - \sum_{h=0}^{\min(p, \lfloor \frac{n}{q+1} \rfloor)} \binom{p}{h} (-1)^h \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1}$.

On vient de montrer que, pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum a_n x^n$ converge et

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$, donc d'après la première partie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème 2 : Séries de Fourier

Partie 1 : Coefficients de Fourier

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $e^{-int} = \cos(nt) - i \sin(nt)$, donc $c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ et de même, $c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$.

Réciproquement, d'après les formules d'Euler, $\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$

et $\sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$, donc $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. les applications $t \mapsto \cos(nt)f(t)$ et $t \mapsto \sin(nt)f(t)$ sont 2π -périodiques, donc d'après le cours, dans la définition de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$, on peut remplacer l'intervalle d'intégration par n'importe quel intervalle de longueur 2π .

f est paire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0$, en tant qu'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto f(t) \cos(nt)$ étant paire, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^2 - \pi^2) \cos(nt) dt$. Effectuons une double intégration par parties :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[(t^2 - \pi^2) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} \times 2t dt \right) = -\frac{4}{\pi n} \left(\left[-\frac{\cos(nt)}{n} t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$.

D'autre part, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^2 - \pi^2) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} - \pi^2 x \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \pi^3 \right)$, donc $a_0 = -\frac{4\pi^2}{3}$.

3°)

◇ Soit $n \in \mathbb{Z}$: par inégalité triangulaire, $|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)e^{-int}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$: ce majorant ne dépend pas de n , donc la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. On raisonne de même pour les suites $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$.

◇ Soit $n \in \mathbb{Z}$. $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int} dt$, donc en posant $u = t+a$,

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-in(u-a)} du, \text{ donc } c_n(g) = e^{ina} c_n(f).$$

4°) g étant C^1 , on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_a^b g(t)e^{int} dt = \left[g(t) \frac{e^{int}}{in} \right]_a^b - \int_a^b g'(t) \frac{e^{int}}{in} dt = -i \frac{g(b)e^{inb} - g(a)e^{ina}}{n} + \frac{i}{n} \int_a^b g'(t)e^{-int} dt,$$

donc en utilisant plusieurs fois l'inégalité triangulaire,

$\left| \int_a^b g(t)e^{int} dt \right| \leq \frac{|g(b)| + |g(a)|}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b |g'(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

5°)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{int} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ d'après la question précédente, étendue aux cas des applications continues. En posant $u = -t$, on obtient que

$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} f(-t)e^{int} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, toujours d'après la question précédente.

De plus $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

◇ Soit $n \in \mathbb{Z}$. En intégrant par parties,

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left([f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f(t)ine^{-int} dt \right) = inc_n(f).$$

Alors, par récurrence sur k , on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

Or d'après la question précédente, $c_n(f^{(k)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $n^k c_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Partie II : Le théorème de Dirichlet

$$6^\circ) \text{ Soit } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}. D_n(t) = e^{-int} \sum_{k=-n}^n e^{i(k+n)t} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}},$$

$$\text{car } e^{it} \neq 1, \text{ donc } D_n(t) = e^{-int} \frac{e^{it(n+\frac{1}{2})} \sin(\frac{2n+1}{2}t)}{e^{\frac{it}{2}} \sin(\frac{t}{2})}. \text{ Ainsi, } \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = D_n(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

et cette relation est encore vraie lorsque $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, car dans ce cas $\frac{t}{2} \in \pi\mathbb{Z}$, donc

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = 0 = \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

$$7^\circ) 2\pi S_n(f)(t_0) = \sum_{k=-n}^n 2\pi c_k(f) e^{ikt_0} = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(t_0-t)} dt,$$

ainsi $2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t_0 - t) dt$. Posons $t = t_0 - u$. On obtient

$$2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{t_0+\pi}^{t_0-\pi} f(t_0 - u) D_n(u) (-du), \text{ mais } f \text{ et } D_n \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques, donc}$$

$$2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - u) D_n(u) du.$$

Coupons cette intégrale en deux intégrales sur les intervalles $[0, \pi]$ et $[-\pi, 0]$ et pratiquons le changement de variable $v = -u$ sur la seconde intégrale. On obtient

$$2\pi S_n(f)(t_0) = \int_0^{\pi} f(t_0 - u) D_n(u) du + \int_{\pi}^0 f(t_0 + v) D_n(-v) (-dv). \text{ Or } D_n \text{ est paire,}$$

$$\text{donc } 2\pi S_n(f)(t_0) = \int_0^{\pi} (f(t_0 - u) + f(t_0 + u)) D_n(u) du.$$

8°)

◇ $\alpha(t) = \left(\frac{f(t_0+t) - f(t_0)}{t} - \frac{f(t_0-t) - f(t_0)}{-t} \right) \times \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$, or f est dérivable en t_0 et

on sait que $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, donc $\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2(f'(t_0) - f'(t_0)) = 0$.

◇ D_n étant paire, $2 \int_0^\pi D_n(t) dt = \int_{-\pi}^\pi D_n(t) dt = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^\pi e^{ikt} dt$, or, pour $k \in \mathbb{Z}^*$,

$\int_{-\pi}^\pi e^{ikt} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_{-\pi}^\pi = 0$, donc $2 \int_0^\pi D_n(t) dt = 2\pi$. On en déduit que

$$2\pi(S_n(f)(t_0) - f(t_0)) = \int_0^\pi (f(t_0-t) + f(t_0+t) - 2f(t_0)) D_n(t) dt = \int_0^\pi \alpha(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) D_n(t) dt,$$

donc $2\pi(S_n(f)(t_0) - f(t_0)) = \int_0^\pi \alpha(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$, puis en posant $t = 2u$,

$$2\pi(S_n(f)(t_0) - f(t_0)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u) \sin((2n+1)u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u) \frac{e^{(2n+1)iu} - e^{-(2n+1)iu}}{2i} du,$$

or on peut utiliser le résultat admis après la question 4 car $u \mapsto 2\alpha(2u)$ est prolongeable en une application continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u) e^{(2n+1)iu} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et de même $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u) e^{-(2n+1)iu} du = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} 2\alpha(-2u) e^{(2n+1)iu} (-du) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

donc on a bien montré que $2\pi(S_n(f)(t_0) - f(t_0)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

9°) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. $S_n(f)(t) = c_0(f) + \sum_{k=1}^n (c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt})$.

Soit $k \in \mathbb{N}_n$. D'après la question 1,

$$\begin{aligned} c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt} &= \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} e^{ikt} + \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2} e^{-ikt} \\ &= a_k(f) \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k(f) \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}, \end{aligned}$$

donc $c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt} = a_k(f) \cos(kt) + b_k(f) \sin(kt)$.

De plus, $b_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(0 \cdot t) dt = 0$, donc $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$. Ainsi,

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kt) + b_k(f) \sin(kt)), \text{ or d'après la question précédente,}$$

$S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$, donc la série $\sum (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$ converge,

$$\text{et } f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)).$$

10°) On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question précédente, car l'application f définie en question 2 n'est pas dérivable en les points de $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Cependant, si $t_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. En

effet, pour $t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = t^2 - \pi^2$, donc f est dérivable à gauche en π , la valeur de la dérivée à gauche étant 2π : ainsi, par 2π -périodicité de f , $\frac{f(t_0 - t) - f(t_0)}{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ 2π . De même, en étudiant le comportement de f à droite de $-\pi$, on montre que f est dérivable à droite en t_0 , donc que $\frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ -2π .

On en déduit, en reprenant la démonstration de la question 8, que $\alpha(t)$ possède encore une limite lorsque t tend vers 0^+ , cette fois non nulle. Cela permet tout de même de prolonger $u \mapsto 2\alpha(2u)$ en une application continue sur $[0, \pi]$. La démonstration de la question 8 et son résultat sont donc encore valables, ainsi que le résultat de la question 9. Alors, en utilisant les coefficients de Fourier calculés en question 2, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

En particulier, pour $x = \pi$ et pour $x = 0$, on obtient que

$$0 = -\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\text{et } -\pi^2 = -\frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$