

## DM 22

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.  
Il n'est pas à rendre.  
Un corrigé sera fourni le jeudi 19 décembre.

### Exercice 1 : Une somme trigonométrique.

1°) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Sans utiliser de démonstration par récurrence, établir que 
$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}.$$

2°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$

### Exercice 2 : Une somme de produits.

1°) Soit  $(a_j)_{j \geq 1}$  une suite de nombres réels.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_k = \prod_{j=1}^k (1 - a_j).$

Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1.$

2°) Dédire de la question précédente que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1.$

3°) Donner une seconde démonstration de cette dernière égalité en faisant intervenir une somme télescopique.

### Exercice 3 : Proximal d'une famille de points du plan.

1°) Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes non nuls. Démontrer que  $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$  si et seulement si les  $z_i$  ont tous le même argument.

2°) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes non nuls dont les images dans le plan complexe sont notées  $A_1, \dots, A_n$ . On suppose que  $A_1, \dots, A_n$  ne sont pas alignés.

On suppose de plus que  $\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \dots + \frac{a_n}{|a_n|} = 0$ .

Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose  $S = \frac{\overline{a_1}}{|a_1|}(a_1 - z) + \frac{\overline{a_2}}{|a_2|}(a_2 - z) + \dots + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}(a_n - z)$ .

a) Vérifier que  $S = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ .

b) En déduire que, pour tout nombre complexe  $z$  :

$$(*) : |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \dots + |a_n - z|.$$

Traduire géométriquement cette inégalité (c'est-à-dire à l'aide des points  $O, A_1, \dots, A_n$  et du point  $M$  d'affixe  $z$ ) et interpréter.

c) Démontrer qu'il y a égalité dans l'inégalité (\*) si et seulement si  $z$  est nul.

### Exercice 4.

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Quel est le nombre de suites strictement monotones constituées de  $p$  nombres de l'ensemble d'entiers  $\{1, \dots, n\}$  ?

## Problème : Dénombrement par involution.

### Principe d'involution.

1°) Soit  $E$  un ensemble fini. On suppose que  $E_+$  et  $E_-$  sont deux parties disjointes de  $E$  dont la réunion est égale à  $E$ . Ainsi,  $E_+ \cap E_- = \emptyset$  et  $E = E_+ \sqcup E_-$ .

Considérons  $f : E \rightarrow E$  une involution, c'est-à-dire une application telle que  $f \circ f = \text{Id}_E$ .

On note  $F_f = \{x \in E / f(x) = x\}$  l'ensemble des points fixes de  $f$ . On suppose que tous les points fixes de  $f$  appartiennent à  $E_+$ , c'est-à-dire  $F_f \subset E_+$ .

On suppose également que l'involution  $f$  est alternante, c'est-à-dire que :

$\forall x \in E_+ \setminus F_f, f(x) \in E_-$  et  $\forall x \in E_-, f(x) \in E_+$ .

Démontrer que  $\text{card}F_f = \text{card}E_+ - \text{card}E_-$ .

### Chemins de Dyck.

On munit le plan d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On rappelle que la notation  $M(a, b)$  signifie que le point  $M$  est de coordonnées  $(a, b)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout entier naturel  $s$ , on appelle chemin de longueur  $s$  la donnée d'une liste  $(M_0, \dots, M_s)$  de  $s + 1$  points à coordonnées entières tels que  $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \in \{\vec{i}, \vec{j}\}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, s\}$ . On dit alors que les  $M_k$  sont les sommets du chemin joignant le point de départ  $M_0$  au point d'arrivée  $M_s$ .

2°) Soient  $a, b, c, d$  quatre entiers relatifs tels que  $a \leq c$  et  $b \leq d$ . Dénombrer les chemins joignant les points de coordonnées  $(a, b)$  et  $(c, d)$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle chemin de Dyck d'ordre  $n$  un chemin  $(M_0, \dots, M_{2n})$  de longueur  $2n$  joignant les points  $M_0(0, 0)$  et  $M_{2n}(n, n)$  tel que tous les sommets ont une abscisse supérieure ou égale à l'ordonnée. Cela revient à dire que le chemin reste en dessous de la première diagonale du plan.

On veut déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre  $C_n$  de chemins de Dyck d'ordre  $n$ .

3°) Déterminer  $C_0, C_1, C_2$  et  $C_3$ . *On fera des dessins.*

On fixe  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $E_+$  l'ensemble des chemins joignant les points de coordonnées  $(1, 0)$  et  $(n+1, n)$ .

On note  $E_-$  l'ensemble des chemins joignant les points de coordonnées  $(0, 1)$  et  $(n+1, n)$ .

On pose  $E = E_+ \sqcup E_-$ .

Pour tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$ , on note  $\widetilde{M}$  le point de coordonnées  $(y, x)$ .

On définit l'application  $f : E \rightarrow E$  qui, à un chemin  $(M_0, \dots, M_{2n})$ , associe

- le chemin  $(M_0, \dots, M_{2n})$  lorsque tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée ;
- le chemin de sommets  $(\widetilde{M}_0, \dots, \widetilde{M}_k, M_{k+1}, \dots, M_{2n})$  avec  $k$  le premier indice d'un sommet où l'abscisse est égale à l'ordonnée, sinon.

4°) Vérifier que  $f$  est une involution alternante et préciser  $F_f$ .

5°) En déduire que  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

### 3 : Formule du crible.

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des ensembles finis. On pose  $U = A_1 \cup \dots \cup A_n$ .

On définit les ensembles suivants :

$$- E = \left\{ (x, I) \in U \times \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) / x \in \bigcap_{k \in I} A_k \right\};$$

$$- E_+ = \{(x, I) \in E / \text{card}(I) \text{ pair}\};$$

$$- E_- = \{(x, I) \in E / \text{card}(I) \text{ impair}\}.$$

On convient que, lorsque  $I = \emptyset$ ,  $\bigcap_{k \in \emptyset} A_k = U$ .

Pour tout élément  $x$  de  $U$ , on pose  $m(x) = \max\{k \in \{1, \dots, n\} / x \in A_k\}$ .

On considère l'application  $f : E \rightarrow E$  qui, à tout élément  $(x, I)$  de  $E$ , lui associe

$$f((x, I)) = \begin{cases} (x, I \cup \{m(x)\}) & \text{si } m(x) \notin I \\ (x, I \setminus \{m(x)\}) & \text{si } m(x) \in I \end{cases}$$

6°) Vérifier que  $f$  est une involution alternante et préciser  $F_f$ .

7°) En déduire la formule du crible.

### 4 : Bijection de Garcia-Milne.

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

On suppose que  $A_+$  et  $A_-$  sont deux parties disjointes de  $A$  dont la réunion est égale à  $A$  et que  $B_+$  et  $B_-$  sont deux parties disjointes de  $B$  dont la réunion est égale à  $B$ .

On considère  $f : A \rightarrow A$  et  $g : B \rightarrow B$  deux involutions alternantes telles que  $F_f \subset A_+$  et  $F_g \subset B_+$ .

On suppose également l'existence d'une bijection  $\varphi : A \rightarrow B$  qui *conserve les signes*, c'est-à-dire  $\forall x \in A_+$ ,  $\varphi(x) \in B_+$  et  $\forall x \in A_-$ ,  $\varphi(x) \in B_-$ .

8°) Démontrer que  $\text{card}F_f = \text{card}F_g$ .

9°) Démontrer que, pour tout élément  $x$  de  $F_f$ , il existe un entier naturel  $\alpha(x)$  tel que  $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\alpha(x)}(x) \in F_g$ . La *puissance désigne une itération pour la loi  $\circ$* .

10°) Exhiber une bijection entre  $F_f$  et  $F_g$ .