Feuille d'exercices 12 : Espaces vectoriels.

Exercice 12.1 : (niveau 1)
On note $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x + y = 1\}$.
Les ensembles A et B sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 12.2 : (niveau 1)
On note A l'ensemble des suites arithmétiques et B l'ensemble des suites monotones.
Les ensembles A et B sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 12.3 : (niveau 1)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B des parties de E. Comparez
a) $Vect(A \cup B)$ et $Vect(A) \cup Vect(B)$,
b) $Vect(A \cap B)$ et $Vect(A) \cap Vect(B)$,
c) $Vect(Vect(A))$ et $Vect(A)$.

Exercice 12.4 : (niveau 1)
On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a, A) \in \mathbb{R}_+^2$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq a \Longrightarrow |f(x)| \leq A|x|$.
Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

Exercice 12.5 : (niveau 1)
On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \longmapsto (ax^2 + bx + c) \cos x$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, déterminer une base de E ainsi que sa dimension.

Exercice 12.6 : (niveau 1)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in L(E, F)$. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que la famille $(u(x_i))_{i \in I}$ est libre si
et seulement si $Ker(u) \cap Vect\{x_i / i \in I\} = \{0\}$.

Exercice 12.7 : (niveau 1)
Montrer que la famille de réels $(\ln(p))_{p \in \mathbb{P}}$, où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, est libre, en considérant $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Exercice 12.8 : (niveau 1)
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, f_i)$ est une base de E.

Exercice 12.9 : (niveau 1)
Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On fixe $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ tel que $x_1 \neq x_2$.
Montrer que $F = \{f \in E / f(x_1) = f(x_2) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $F \oplus \mathbb{R}_1[X] = E$.

Exercice 12.10 : (niveau 1)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit H un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

1°) Si $x_1 \notin H$, montrer qu'on peut compléter (x_1) en une base de E ne contenant aucun vecteur de H.

2°) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $x_i \notin H$, montrer qu'on peut compléter $(x_1, \ldots, x_p)$ en une base de E ne contenant aucun vecteur de H.

Exercice 12.11 : (niveau 2)
Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on note $M(X) = \begin{pmatrix} x + 2y + 4z \\ 3y + 3z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$.
Montrer que $M \in L(\mathbb{R}^3)$, puis calculer $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$.

Exercice 12.12 : (niveau 2)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.
Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + \mathrm{Ker}(f) \subset B + \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 12.13 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un élément de $L(E)$.

1°) Montrer que $Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$ si et seulement si $Ker(u^2) = Ker(u)$.

2°) Montrer que $E = Ker(u) + Im(u)$ si et seulement si $Im(u^2) = Im(u)$.

Exercice 12.14 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in L(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$
et $Ker(u) \cap Ker(v) = \{0\}$.
Montrer que quelque soit $i, j \in \mathbb{N}$, $Ker(u^i) \cap Ker(v^j) = \{0\}$.

Exercice 12.15 : (niveau 2)
On note E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n éléments de E que l'on suppose libre. Pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $v \in E$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\displaystyle\int_0^1 u_i(t)v(t)\, dt = \alpha_i$.

Exercice 12.16 : (niveau 2)
On admettra que tout espace vectoriel possède au moins une base, et que tout sous-espace d'un espace vectoriel possède au moins un supplémentaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls et $f \in L(E, F)$.
Montrez que f est un isomorphisme si et seulement si,
pour tout $g \in L(F, E)$, $(f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0)$.

Exercice 12.17 : (niveau 2)

1°) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites périodiques est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

2°) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions périodiques est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 12.18 : (niveau 2)
Soit $\mathbb{K}$ un corps dont le cardinal q est fini.
Déterminer le nombre de droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12.19 : (niveau 2)
Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & u_k \end{array}$.
On note aussi $\varphi_\infty : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \end{array}$.

1°) Montrer que la famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (\varphi_\infty)$ est une famille libre de $L(E, \mathbb{R})$.

2°) Montrer que cette famille n'est pas une base de $L(E, \mathbb{R})$.

Exercice 12.20 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et V_1, V_2, W_1, W_2 4 sous-espaces vectoriels de E.

1°) Donnez une CNS pour qu'il existe $g \in GL(E)$ tel que $g(V_1) = W_1$.

2°) Donnez une CNS pour qu'il existe $g \in GL(E)$ tel que $g(V_1) = W_1$ et $g(V_2) = W_2$.

Exercice 12.21 : (niveau 2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. Notons $X = \{u \in L(E) / F \subseteq Ker u\}$.
Montrer que X est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ et déterminer sa dimension.

Exercice 12.22 : (niveau 2)
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$.
On pose $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si
v est surjective, u est injective et $F = Im(u) \oplus Ker(v)$.

Exercice 12.23 : (niveau 3)
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$.

1°) Montrer que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

2°) Si B est un corps et si A est un B-espace vectoriel, on note, lorsqu'elle est définie, $dim_B(A)$ la dimension de A.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
On suppose que $dim_{\mathbb{L}}(\mathbb{K})$ et $dim_{\mathbb{K}}(E)$ sont définies. Montrer que $dim_{\mathbb{L}}(E)$ est également définie et que $dim_{\mathbb{L}}(E) = dim_{\mathbb{L}}(\mathbb{K})dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Exercice 12.24 : (niveau 3)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Soit $u \in L(E)$.
On pose $\sigma(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ u - \lambda Id_E \notin GL(E)\}$ (on dit que $\sigma(u)$ est le spectre de u).
On suppose que $\sigma(u) \neq \emptyset$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\sigma(P(u)) = P(\sigma(u))$.

Exercice 12.25 : (niveau 3)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p (c'est-à-dire que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$).
Pour tout $v \in L(E)$, on pose $\Phi(v) = uv - vu$.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v \in L(E)$, $\Phi^n(v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u^{n-k} v u^k$, où Φ^n désigne la composée de Φ avec lui-même n fois.

2°) Pour tout $a \in L(E)$, montrer qu'il existe $b \in L(E)$ tel que $aba = a$.

3°) Montrer que Φ est nilpotent et préciser son indice de nilpotence,
lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$.

Exercice supplémentaire :

Exercice 12.26 : (niveau 1)
Montrez que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telles que $(|u_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite majorée est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

Exercice 12.27 : (niveau 1)
Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 12.28 : (niveau 1)
Montrez que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists a \in \mathbb{R} \ \ f(x) = ax\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 12.29 : (niveau 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E tels que $A \cap B = A \cap C, A + B = A + C$ et $B \subseteq C$.
Montrez que $B = C$.

Exercice 12.30 : (niveau 1)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, différent de E. Soit u une fonction de E dans E telle que la restriction de u sur le complémentaire de F est nulle.
Montrer que u est linéaire si et seulement si elle est nulle.

Exercice 12.31 : (niveau 2)
Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel A.

1°) Est-il vrai que $E \cap (F + G) = (E \cap F) + (E \cap G)$?

2°) Est-il vrai que $E \cap (F + (E \cap G)) = (E \cap F) + (E \cap G)$?

Exercice 12.32 : (niveau 2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et h un endomorphisme de E.

1°) Si F est un sous-espace vectoriel de E, montrer que
$h^{-1}(h(F)) = F + Ker(h)$.

2°) Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Exprimer $h(h^{-1}(F))$ en fonction de F et de $Im(h)$.

3°) Déterminer les sous-espaces vectoriels F de E pour lesquels
$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$.

Exercice 12.33 : (niveau 2)
u et v sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u \circ v + \alpha u + \beta v = 0$, avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
Montrer que $u + \beta Id_E$ est inversible, puis que $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 12.34 : (niveau 2)
Notons E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Posons $F_1 = \{f \in E / \forall z \in \mathbb{C} \ \ f(jz) = f(z)\}$,
$F_2 = \{f \in E / \forall z \in \mathbb{C} \ \ f(jz) = jf(z)\}$,
et $F_3 = \{f \in E / \forall z \in \mathbb{C} \ \ f(jz) = j^2 f(z)\}$.
Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 12.35 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe un unique $g \in L(E)$ tel que $f \circ g = Id_E$. Montrer que f est un automorphisme de E.

Exercice 12.36 : (niveau 2)
Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, comparer les sous-espaces vectoriels respectivement engendrés par les familles $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \varphi_n(x) = \cos(nx) \text{ et } \psi_n(x) = \cos^n x.$$

Exercice 12.37 : (niveau 2)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que $E^* \times F^*$ est isomorphe à $(E \times F)^*$.

Exercice 12.38 : (niveau 2)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$, avec $f \neq 0$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) f est injective.
ii) L'image par f de toute famille libre est libre.
iii) Pour tout triplet (G, H, L) de sous-espaces vectoriels de E tel que $G = H \oplus L$, $f(G) = f(H) \oplus f(L)$.

Exercice 12.39 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On note S l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E et on suppose que d est une application de S dans $\mathbb{N}$ telle que $d(E) = n$ et telle que, pour tout $(F, F') \in S^2$ tel que $F \cap F' = \{0\}$, $d(F + F') = d(F) + d(F')$.

1°) Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. On suppose que $d(Vect(x)) = 0$.
Montrer que, pour tout $y \in E$ avec $y \neq 0$, $d(Vect(y)) = 0$.

2°) Montrer que, pour tout $F \in S$, $d(F) = dim(F)$.

Exercice 12.40 : (niveau 3)
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1°) Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels strictement inclus dans E est également strictement incluse dans E.

2°) Plus généralement, si n est un entier supérieur ou égal à 2, montrer que la réunion de n sous-espaces vectoriels strictement inclus dans E est strictement incluse dans E.

Exercice 12.41 : (niveau 3)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E_1, ..., E_n n sous-espaces vectoriels de E et F_1, ..., F_n n sous-espaces vectoriels de F.

1°) Montrer que $f(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$.

Si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, peut-on affirmer que la somme $\sum_{i=1}^{n} f(E_i)$ est aussi directe ?
Examiner le cas où f est injective.

2°) Montrer que $f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} F_i) \supset \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(F_i)$.
Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
Proposer une condition suffisante simple, portant sur f, pour que l'inclusion précédente soit une égalité.

3°) Si la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, peut-on affirmer que la somme $\sum_{i=1}^{n} f^{-1}(F_i)$ est aussi directe ? Examiner le cas où f est injective.

Exercice 12.42 : (niveau 3)
n est un entier supérieur ou égal à 1.
E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
On dit qu'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de p vecteurs de E est positivement génératrice si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ avec, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\alpha_i \geq 0$.
Déterminer le plus petit cardinal des familles positivement génératrices de E.