

DM 24 : un corrigé.

Partie I

1.a) Supposons que l'équation $(E) : \xi^2 = \bar{a}$ possède au moins une solution, notée $\xi_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors $(E) \iff \xi^2 - \xi_0^2 = 0 \iff (\xi - \xi_0)(\xi + \xi_0) = 0$, or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps car p est premier, donc c'est en particulier un anneau intègre.

Ainsi, $(E) \iff [\xi = \xi_0 \text{ ou } \xi = -\xi_0]$.

De plus, $\xi_0 = -\xi_0 \Rightarrow \bar{2}\xi_0 = 0 \Rightarrow \xi_0 = 0$, car $p \geq 3$, donc $\bar{2} \neq 0$.

Ainsi, $\xi_0 = -\xi_0 \Rightarrow \bar{a} = 0 \Rightarrow p|a$, ce qui est faux.

Ainsi ξ_0 et $-\xi_0$ sont les deux seules racines distinctes de (E) , lorsque (E) possède au moins une solution. On a bien montré que (E) possède exactement 0 ou 2 solutions.

1.b) Notons R l'ensemble des résidus quadratiques et notons $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \rightarrow R$ l'application définie par $f(x) = x^2$. f est surjective par définition de R et d'après la question précédente, pour tout $\alpha \in R$, le cardinal de $f^{-1}(\{\alpha\})$ est égal à 2, donc d'après le principe des bergers, $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*| = 2|R|$. Ainsi, $|R| = \frac{p-1}{2}$.

Il y a donc $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques et $p-1 - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}$ non-résidus quadratiques.

1.c) Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $\bar{1}^2 = \bar{1}$, $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{3}^2 = \bar{9}$, $\bar{4}^2 = \bar{5}$, $\bar{5}^2 = \bar{3}$,

puis $\bar{6}^2 = (-\bar{5})^2 = \bar{3}$, $\bar{7}^2 = (-\bar{4})^2 = \bar{5}$ etc.

On en déduit que les RQ modulo 11 sont 1, 3, 4, 5 et 9 et que les NRQ modulo 11 sont 2, 6, 7, 8, et 10.

1.d.α) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a .

L'application f de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ définie par $f(\bar{k}) = \overline{ka}$ est une bijection : en effet, p est premier et p ne divise pas a , donc $\bar{a} \neq 0$, donc \bar{a} est inversible dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ainsi f est correctement définie, bijective d'application réciproque $\bar{k} \mapsto \bar{a}^{-1}\bar{k}$.

On en déduit que, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, $\left(\frac{ka}{p}\right)$ est défini,

et que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{ka}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = \frac{p-1}{2} - \frac{p-1}{2} = 0$, d'après la question précédente.

1.d.β.1)

◇ Supposons que $k' = p-1$. Alors $\bar{k} = \overline{k'}^{-1} = \overline{-1}^{-1} = \overline{-1} = \overline{p-1}$, ce qui est faux car $k \in \{1, \dots, p-2\}$. Ainsi $k' \neq p-1$.

◇ On remarque que p ne divise ni k , ni $k' + 1$, ni $k + 1$, donc p étant premier, p ne divise pas $k(k + 1)$ ni $k' + 1$, donc les symboles $\left(\frac{k(k + 1)}{p}\right)$ et $\left(\frac{k' + 1}{p}\right)$ sont bien définis.

Supposons que $\left(\frac{k(k + 1)}{p}\right) = 1$. Il existe $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $\overline{k(k + 1)} = x^2$. Alors $(\overline{k'}x)^2 = \overline{k'k} \times \overline{k'(k + 1)} = \overline{1 + k'}$, donc $\left(\frac{k' + 1}{p}\right) = 1$.

Réciproquement, supposons que $\left(\frac{k' + 1}{p}\right) = 1$. Il existe $y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $\overline{k' + 1} = y^2$. Alors $(\overline{k}y)^2 = \overline{k^2} \times (\overline{k}^{-1} + 1) = \overline{k + k^2} = \overline{k(k + 1)}$, donc $\left(\frac{k(k + 1)}{p}\right) = 1$.

Ceci démontre que $\left(\frac{k(k + 1)}{p}\right) = \left(\frac{k' + 1}{p}\right)$.

1.d.β.2) D'après la question précédente, $\sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{k(k + 1)}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{\overline{k}^{-1} + 1}{p}\right)$, en conve-

nant que $\left(\frac{\overline{a}}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$. Mais l'application $x \mapsto x^{-1}$ est une bijection involutive de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dans lui-même, et $\overline{p-1}^{-1} = \overline{-1}^{-1} = \overline{-1} = \overline{p-1}$,

donc $\sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{k(k + 1)}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{\overline{k} + 1}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{\overline{k}}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}\right) = 0 - 1 = -1$, car $(\overline{1})^2 = \overline{1}$, donc $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.

2.a.α) Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$. Notons $G = \{\overline{x^k}/k \in \mathbb{Z}\}$. G est le groupe multiplicatif engendré par \overline{x} dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (on a bien $\overline{x} \neq 0$). D'après le théorème de Lagrange, $Card(G)$ divise $Card(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = p - 1$.

De plus d'après le cours sur les groupes cycliques, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\overline{x^h} = \overline{1} \iff Card(G) | h$, donc $\overline{x^{p-1}} = \overline{1}$, ce qu'il fallait démontrer.

2.a.β) Notons g l'application proposée par l'énoncé. Pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $g(g(x)) = g(x^{-1}\overline{a}) = (x^{-1}\overline{a})^{-1}\overline{a} = x$, donc g est une involution.

Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, notons xRy si et seulement si $[x = y \text{ ou } y = f(x)]$. En utilisant le fait que $xRy \iff \{x, f(x)\} = \{y, f(y)\}$, on vérifie que R est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, xRx , $xRy \Rightarrow yRx$ et $[xRy, yRz] \Rightarrow xRz$.

De plus, si $f(x) = x$, alors $x^2 = \overline{a}$, ce qui est faux car $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, donc les classes d'équivalence sont toutes de cardinal 2.

Comme elles forment une partition de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

on a $(p - 1)! = \prod_{C \in [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}]/R} \prod_{k \in C} k = \prod_{C \in [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}]/R} \overline{a}$, car si C est une classe d'équivalence,

elle est de la forme $C = \{x, f(x)\}$, donc $\prod_{k \in C} k = xf(x) = \bar{a}$.

Finalement, $\overline{(p-1)!} = \bar{a}^{\frac{p-1}{2}}$.

2.a.δ) D'après la question 2.a.α, pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$, x est une racine du polynôme $P = X^{p-1} - 1$, à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$.

Posons $Q = \prod_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*} (X - x)$: P et Q sont tous deux unitaires, donc $\deg(P - Q) < p - 1$,

or pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$, $(P - Q)(x) = 0$, donc $P - Q$ possède au moins $p - 1$ racines, ce qui d'après le principe de rigidité des polynômes entraîne que $P = Q$. En particulier, $-1 = P(0) = Q(0) = \prod_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*} (-x) = (-1)^{p-1} \overline{(p-1)!}$, or p est impair, donc

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

2.a.γ) Si $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, d'après la question précédente et le théorème de Wilson, modulo p , $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (p-1)! \equiv -1 \equiv \left(\frac{a}{p}\right)$.

Si maintenant $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv k^2$,

donc $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv k^{p-1} \equiv 1 \equiv \left(\frac{a}{p}\right)$ d'après le théorème d'Euler.

Remarque : on peut éviter l'utilisation de la question 2.a.β : le point précédent montre que les $\frac{p-1}{2}$ RQ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ sont très exactement les racines du polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$, car il est de degré $\frac{p-1}{2}$, donc il ne peut posséder d'autres racines. Or si x est NRQ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$, alors $(x^{\frac{p-1}{2}})^2 - 1 = 0$, donc $x^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$. Ainsi, $x^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

◇ Modulo 31, $100 \equiv 7$, donc $10^3 \equiv 70 \equiv 8$, donc $\left(\frac{10}{31}\right) \equiv 10^{\frac{31-1}{2}} \equiv (10^3)^5 \equiv 8^5$. De plus, $8^2 = 64 \equiv 2$, donc $8^5 = 8(8^2)^2 \equiv 8 \times 4 \equiv 1$. Ainsi, $\left(\frac{10}{31}\right) \equiv 1$ modulo 31, or $\left(\frac{10}{31}\right) \in \{-1, 1\}$, donc $\left(\frac{10}{31}\right) = 1$.

2.b) p étant impair, $p \equiv 1$ modulo 4 ou $p \equiv 3$.

Supposons d'abord que $p \equiv 1$ modulo 4. Alors $\frac{p-1}{2}$ est pair, donc $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ modulo p , or $\left(\frac{-1}{p}\right) \in \{-1, 1\}$, donc $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$.

Supposons maintenant que $p \equiv 3$ modulo 4. Alors $\frac{p-1}{2}$ est impair, donc $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ modulo p , donc $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$.

2.c.α) Supposons qu'aucun diviseur premier de n n'est congru à 3 modulo 4.

$n \equiv 3$ modulo 4, donc n est impair, donc ses diviseurs premiers sont aussi impairs, donc ils sont tous congrus à 1 modulo 4. Ainsi, si p est un diviseur premier de n , dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\bar{p} = \bar{1}$.

D'après le cours, l'entier n se décompose comme un produit de nombres premiers p_i qui sont bien sûr tous des diviseurs premiers de n , donc pour tout i , $\overline{p_i} = \overline{1}$, donc $\overline{3} = \overline{n} = \prod_i \overline{p_i} = \overline{1}$, ce qui est faux. Ainsi, il existe bien un diviseur premier de n qui est congru à 3 modulo 4.

2.c.β) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de l'équation.

◇ Supposons que y est pair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k$.

Modulo 4, $y^3 = 8k^3 \equiv 0$, donc $x^2 = -1 - y^3 + 8(2z + 1)^3 \equiv -1 \equiv 3$. Or, si x est pair $x = 2h$, donc $x^2 = 4h^2 \equiv 0$ modulo 4, et si x est impair, $x = 2h + 1$, donc $x^2 = 4h^2 + 4h + 1 \equiv 1$ modulo 4, donc on n'a jamais $x^2 \equiv 3$. Ainsi y est impair.

◇ On a $x^2 + 1 = (2(2z + 1))^3 - y^3 = (2(2z + 1) - y)A$,

où $A = (2(2z + 1))^2 + y \times 2(2z + 1) + y^2 \equiv 2y + y^2$ modulo 4, or y est de la forme $2h + 1$, donc $2y = 4h + 2 \equiv 2$ modulo 4 et $y^2 = 4h^2 + 4h + 1 \equiv 1$. Ainsi $A \equiv 3$ modulo 4.

◇ D'après la question précédente, il existe un nombre premier p , diviseur de A avec $p \equiv 3$ modulo 4. Modulo p , $A \equiv 0$, donc $x^2 + 1 \equiv 0$. Ainsi $-1 \equiv x^2$, donc $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, ce qui est faux car $p \equiv 3$ modulo 4. On aboutit à une contradiction, sous l'hypothèse que (x, y, z) est une solution de l'équation.

Ainsi cette équation n'a aucune solution dans \mathbb{Z}^3 .

◇ Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de l'équation de Lebesgue, alors $(x, y, 0)$ est une solution de l'équation précédente dans \mathbb{Z}^3 ce qui est impossible, donc l'équation de Lebesgue n'admet aucune solution dans \mathbb{Z}^2 .

3.a)

— 1) $\overline{1} = (\overline{1})^2$, donc $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.

— 2) Si $a \equiv b$ modulo p , alors $\overline{a} = \overline{b}$, donc d'après la fin de l'introduction, a est RQ mod p si et seulement si b est RQ mod p , donc $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

— 3) $\overline{a^2} = (\overline{a})^2$, donc $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$.

— 4) D'après la question 2), modulo p , $\left(\frac{a}{p}\right) \times \left(\frac{b}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{ab}{p}\right)$,
or $\left(\frac{a}{p}\right) \times \left(\frac{b}{p}\right)$ et $\left(\frac{ab}{p}\right)$ sont dans $\{-1, 1\}$, donc ils sont égaux.

3.b) On a $a = a' \prod_{i=1}^N p_i^{s_i}$, avec pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, s_i pair : posons $s_i = 2t_i$. Ainsi

$a = a'b^2$ où $b = \prod_{i=1}^N p_i^{t_i}$. Alors d'après la propriété 4) précédente puis la propriété 3),

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right) \left(\frac{b^2}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right).$$

4) Lemme de Gauss

4.a) Soit $i, j \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ avec $i > j$. Supposons que $r_i = r_j$. Alors, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\overline{ia} = \overline{r_i} = \overline{r_j} = \overline{ja}$, donc $\overline{i-j} \times \overline{a} = 0$, or $\overline{a} \neq 0$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, donc $\overline{i-j} = 0$, ce qui est impossible car $1 \leq i-j \leq i \leq \frac{p-1}{2} \leq p-1$. Ainsi, $r_i \neq r_j$.

4.b)

— 1) Par construction, les entiers $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t$ sont exactement les entiers $r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}$ dans un ordre différent, donc ils sont deux à deux distincts et forment $\{r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}\}$.

— 2) Soit $i \in \{1, \dots, s\}$ et $j \in \{1, \dots, t\}$. Supposons que $u_i = p - v_j$.

Il existe $k, h \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ tels que $u_i = r_h$ et $v_j = r_k$.

Alors, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\overline{h+k} \times \overline{a} = \overline{r_h} + \overline{r_k} = \overline{u_i} + \overline{v_j} = \overline{p} = 0$, donc $\overline{h+k} = 0$, ce qui est impossible car $1 \leq h+k \leq 2 \times \frac{p-1}{2} = p-1$. Ainsi $u_i \neq p - v_j$.

De plus, par construction, les u_1, \dots, u_s sont deux à deux distincts, ainsi que les $p - v_1, \dots, p - v_t$, donc les entiers $u_1, \dots, u_s, p - v_1, \dots, p - v_t$ sont deux à deux distincts.

Pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, $\frac{p-1}{2} = p - \frac{p+1}{2} \geq p - v_j \geq p - (p-1) = 1$,

donc $u_1, \dots, u_s, p - v_1, \dots, p - v_t$ constituent $\frac{p-1}{2}$ entiers deux à deux distincts de $\{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Ainsi, $\{u_1, \dots, u_s, p - v_1, \dots, p - v_t\} = \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.

4.c)

◇ Raisonons modulo p :

$u_1 \cdots u_s \times v_1 \cdots v_t = r_1 \cdots r_{\frac{p-1}{2}} \equiv a \times (2a) \times \cdots \times (\frac{p-1}{2}a) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\frac{p-1}{2})!$ et

$(-1)^t u_1 \cdots u_s \times v_1 \cdots v_t \equiv u_1 \cdots u_s \times (p - v_1) \cdots (p - v_t) = 1 \times 2 \times \cdots \times \frac{p-1}{2} \equiv (\frac{p-1}{2})!$,

donc dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\overline{a^{\frac{p-1}{2}} (\frac{p-1}{2})!} = (-1)^t \overline{(\frac{p-1}{2})!}$, or dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$\overline{(\frac{p-1}{2})!} = \overline{1 \times 2 \times \cdots \times \frac{p-1}{2}} \neq 0$, donc $\overline{a^{\frac{p-1}{2}}} = (-1)^t$. Or on a vu que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)$, donc

$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv (-1)^t$ modulo p , mais $\left(\frac{a}{p}\right)$ et $(-1)^t$ sont dans $\{-1, 1\}$, donc ils sont égaux.

◇ Prenons $p = 29$ et $a = 8$: les restes modulo p de ja pour j variant de 1 à $\frac{p-1}{2} = 14$ sont respectivement, en soulignant ceux qui sont supérieurs à $\frac{p+1}{2} = 15$:

8, 16, 24, 3, 11, 19, 27, 6, 14, 22, 1, 9, 17, 25. Ainsi $t = 7$ puis $\left(\frac{8}{29}\right) = (-1)^7 = -1$.

4.d)

◇ Avec $a = 2$, on a $r_1 = 2, \dots, r_{\frac{p-1}{2}} = 2 \times \frac{p-1}{2} = p-1$, donc $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^t$, où t est le nombre des entiers parmi $\{2, 4, \dots, p-1\}$ qui sont supérieurs à $\frac{p}{2}$.

Or pour $n \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, $2n \leq \frac{p}{2} \iff n \leq \lfloor \frac{p}{4} \rfloor$, donc $t = \frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p}{4} \rfloor$.

◇ Si $p \equiv 1$ modulo 4, alors en posant $p = 1 + 4k$, $p^2 = 1 + 8k + 16k^2$,

donc $\frac{p^2-1}{8} = k + 2k^2 \equiv k$ modulo 2 et $\frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p}{4} \rfloor = 2k - k \equiv -k \equiv k$ modulo 2, donc $\frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p}{4} \rfloor \equiv \frac{p^2-1}{8}$ modulo 2.

Sinon, $p \equiv 3$ modulo 4, donc en posant $p = -1 + 4k$, $p^2 = 1 - 8k + 16k^2$, donc $\frac{p^2-1}{8} = -k + 2k^2 \equiv k$ modulo 2 et $\frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p}{4} \rfloor = (-1 + 2k) - (k-1) \equiv k$ modulo 2, donc

on a encore $\frac{p-1}{2} - \lfloor \frac{p}{4} \rfloor \equiv \frac{p^2-1}{8}$ modulo 2.

◇ Ainsi $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^t = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

◇ $\left(\frac{8}{31}\right) = \left(\frac{2}{31}\right)^3 = \left(\frac{2}{31}\right) = (-1)^{\frac{31^2-1}{8}} = (-1)^{120} = 1$.

4.e) On suppose que $p = 8n + 7$ est premier.

Alors $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(p+1)}{8}} = (-1)^{(8n+6)(n+1)} = 1$, mais on a aussi $\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}$ modulo

p , donc $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ modulo p , c'est-à-dire : $p = 8n + 7 \mid 2^{4n+3} - 1$.

Or on peut montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $8n + 7 < 2^{4n+3} - 1$, car si $8n + 7 < 2^{4n+3} - 1$, alors $2^{4(n+1)+3} - 1 = 2^{4n+3}2^4 - 1 > 2^4(8n + 7 + 1) - 1$, donc $2^{4(n+1)+3} - 1 > 8n + 16 \times 8 - 1 > 8n + 15 = 8(n + 1) + 7$.

Ainsi, $2^{4n+3} - 1$ n'est pas un nombre premier.

Partie II

1.a) $\text{Card}\left(\left\{a \in \mathbb{N}^*/0 < a < \frac{p}{2}\right\}\right) = \frac{p-1}{2}$ et $\text{Card}\left(\left\{b \in \mathbb{N}^*/0 < b < \frac{q}{2}\right\}\right) = \frac{q-1}{2}$, donc $\text{Card}\left(\left\{(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}/0 < a < \frac{p}{2} \text{ et } 0 < b < \frac{q}{2}\right\}\right) = \frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}$.

1.b) Supposons qu'il existe $(m, n) \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\} \times \{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$ tel que (m, n) soit un point du segment $[O, C]$. Alors $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$, donc $pn = qm$. Ainsi $p \mid qm$, mais p et q sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, $p \mid m$, ce qui est impossible car $1 \leq m \leq p - 1$. Ainsi le segment $[O, C]$ ne possède aucun point à coordonnées entières.

1.c) Soit $(j, k) \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\} \times \{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$. Le point (j, k) est dans le triangle OAC si et seulement si $1 \leq k \leq \frac{q}{p}j$. Pour j fixé, il y a exactement $\lfloor \frac{jq}{p} \rfloor$ entiers k dans $\{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$ vérifiant $k < \frac{jq}{p}$ (on remarque que $\frac{jq}{p} \notin \mathbb{N}$), donc le nombre de points de

\mathbb{N}^{*2} situés dans le triangle OAC est $\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor$.

De même, pour $k \in \{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$ fixé, il y a exactement $\lfloor \frac{kp}{q} \rfloor$ entiers j dans $\{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ vérifiant $j < \frac{kp}{q}$, donc le nombre de points de \mathbb{N}^{*2} situés dans le triangle OBC est

$$\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor.$$

4.d)

◇ $(u + v) + (u + pt - v) = 2u + pt \equiv pt$ modulo 2. De plus p est impair, donc $p \equiv 1$ modulo 2, puis $(u + v) + (u + pt - v) \equiv t$ modulo 2.

◇ On a $u + v = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} r_j$ et $u + pt - v = \sum_{i=1}^s u_i + \sum_{j=1}^t (p - v_j) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \frac{p^2 - 1}{8}$, donc,

modulo 2, $t \equiv (u + v) + (u + pt - v) \equiv \frac{p^2-1}{8} + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} r_j$.

◇ Pour tout $j \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, écrivons la division euclidienne de jq par p : $jq = \alpha_j p + r_j$.
Ainsi $\alpha_j = \lfloor \frac{jq}{p} \rfloor$, donc, toujours modulo 2,

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor \equiv p \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_j \equiv \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (jq - r_j) \equiv q \frac{p^2-1}{8} - \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} r_j \equiv \frac{p^2-1}{8} + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} r_j,$$

ainsi $t \equiv \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor$.

1.e) On en déduit que $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^t = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor}$.

En échangeant p et q , on a également $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor}$,

donc $\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$, d'après la question c.

2.a) $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right)$ si et seulement si $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$ est impair, donc si et seulement si $\frac{p-1}{2}$ et $\frac{q-1}{2}$ sont impairs, donc si et seulement si $p \equiv 3$ et $q \equiv 3$ modulo 4.

2.b) $6417 = 3^2 \cdot 23 \cdot 31$, donc $\left(\frac{6417}{6607}\right) = \left(\frac{23}{6607}\right) \left(\frac{31}{6607}\right)$.

On a $23 \equiv 3$ modulo 4 et $6607 \equiv 3$ modulo 4, donc $\left(\frac{23}{6607}\right) = -\left(\frac{6607}{23}\right)$, or $6607 \equiv 6$ modulo 23, donc $\left(\frac{23}{6607}\right) = -\left(\frac{6}{23}\right) = -\left(\frac{2}{23}\right) \left(\frac{3}{23}\right)$.

D'après I.4.c, $\left(\frac{2}{23}\right) = (-1)^{\frac{23^2-1}{8}} = (-1)^{66} = 1$, de plus $3 \equiv 3$ modulo 4 et $23 \equiv 3$ modulo 4, donc $\left(\frac{3}{23}\right) = -\left(\frac{23}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = -(-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = 1$.

Ainsi, $\left(\frac{23}{6607}\right) = -1$.

De plus, $31 \equiv 3$ modulo 4 et $6607 \equiv 3$ modulo 4,

donc $\left(\frac{31}{6607}\right) = -\left(\frac{6607}{31}\right) = -\left(\frac{4}{31}\right) = -\left(\frac{2^2}{31}\right) = -1$,

donc finalement, $\left(\frac{6417}{6607}\right) = 1$.

3) Test de Pépin

◇ Supposons que F_n est premier. Comme $3 \equiv 3$ modulo 4 et $F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv 1$ modulo 4 (car $n \geq 1$), on a : $\left(\frac{3}{F_n}\right) = \left(\frac{F_n}{3}\right)$, or, modulo 3, $F_n \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 2$, donc $\left(\frac{3}{F_n}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = -1$, mais on a vu que $\left(\frac{3}{F_n}\right) \equiv 3^{\frac{F_n-1}{2}}$ modulo F_n , donc $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1$ modulo F_n .

◇ Réciproquement, supposons que $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1$ modulo F_n .

Alors $3^{F_n-1} = \left(3^{\frac{F_n-1}{2}}\right)^2 \equiv 1$ modulo F_n .

Soit p un diviseur premier de F_n (nécessairement $p \geq 5$ car 2 et 3 ne divisent pas F_n). Alors $3^{F_n-1} \equiv 1$ modulo p .

p est premier avec 3, donc $\bar{3} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si l'on note α l'ordre de $\bar{3}$ pour la multiplication, on sait que $\bar{3}^k = 1 \iff \alpha|k$, donc en particulier, $\alpha|F_n - 1 = 2^{2^n}$.

Mais $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \not\equiv 1$ modulo p , donc α ne divise pas $\frac{F_n-1}{2} = 2^{2^n-1}$. Ainsi, $\alpha = 2^{2^n}$.

Mais α est le cardinal du groupe engendré par $\bar{3}$, donc $\alpha \leq p-1$. Ainsi $F_n \leq p$ et $p|F_n$, donc $F_n = p$ est premier.

◇ $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$.

On calcule $3^{\frac{F_5-1}{2}} = 3^{2^{31}}$ modulo F_5 en utilisant l'algorithme d'exponentiation rapide : on pose $x_0 = 3^{2^0} = 3$ et on définit la suite (x_n) par la relation de récurrence suivante : x_{n+1} est le reste de la division euclidienne de x_n^2 par F_5 .

Le programme Python suivant effectue le calcul de x_{31} :

```
x=3
n = 2**(2**5)+1
print('n= ',n)

for i in range(31) :
    x = x**2 % n
    print('3^(2^',i+1,')= ',x)
```

Voici les résultats qu'il produit :

```
n= 4294967297
3^(2^ 1 )= 9
3^(2^ 2 )= 81
3^(2^ 3 )= 6561
3^(2^ 4 )= 43046721
3^(2^ 5 )= 3793201458
3^(2^ 6 )= 1461798105
3^(2^ 7 )= 852385491
3^(2^ 8 )= 547249794
3^(2^ 9 )= 1194573931
3^(2^ 10 )= 2171923848
```

$$\begin{aligned}
3^{(2^{11})} &= 3995994998 \\
3^{(2^{12})} &= 2840704206 \\
3^{(2^{13})} &= 1980848889 \\
3^{(2^{14})} &= 2331116839 \\
3^{(2^{15})} &= 2121054614 \\
3^{(2^{16})} &= 2259349256 \\
3^{(2^{17})} &= 1861782498 \\
3^{(2^{18})} &= 1513400831 \\
3^{(2^{19})} &= 2897320357 \\
3^{(2^{20})} &= 367100590 \\
3^{(2^{21})} &= 2192730157 \\
3^{(2^{22})} &= 2050943431 \\
3^{(2^{23})} &= 2206192234 \\
3^{(2^{24})} &= 2861695674 \\
3^{(2^{25})} &= 2995335231 \\
3^{(2^{26})} &= 3422723814 \\
3^{(2^{27})} &= 3416557920 \\
3^{(2^{28})} &= 3938027619 \\
3^{(2^{29})} &= 2357699199 \\
3^{(2^{30})} &= 1676826986 \\
3^{(2^{31})} &= 10324303
\end{aligned}$$

Ainsi, $3^{\frac{F_5-1}{2}} = 3^{2^{31}} \equiv 10\,324\,303 \not\equiv -1 \pmod{4\,294\,967\,297}$, donc F_5 est composé.

4.a) Il nous faut discuter suivant la congruence de p modulo 4, pour utiliser la loi de réciprocité quadratique, et la congruence de p modulo 3, pour simplifier $\left(\frac{p}{3}\right)$, d'où une discussion selon la valeur de p modulo 12.

Si $p \equiv -1 \pmod{12}$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 12k - 1$.

Modulo 4, on a $3 \equiv 3$ et $p \equiv 3$, donc $\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right)$, mais $p \equiv -1 \pmod{3}$, donc

$$\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1 \text{ (déjà vu). On en déduit que } \left(\frac{3}{p}\right) = 1.$$

Les autres cas se traitent de façon analogue.

4.b) $\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$ ce qui permet de conclure en utilisant les questions I.2.b et II.4.a.