Suites de vecteurs

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définition d'une norme

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle norme sur E toute application $N\ : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{K}$,

- ⋄ $N(x) \geq 0$ (positivité).
- ⋄ $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ (N est définie),
- ⋄ $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (N est homogène), et
- ⋄ $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, cette dernière propriété étant appelée l'inégalité triangulaire.

Si N est une norme sur E, le couple (E, N) est appelé un espace vectoriel normé.

Notation. Sauf indication du contraire, une norme sur un espace vectoriel est notée $\begin{array}{rccc} \|.\|: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$.

Lorsqu'on dit "soit E un espace vectoriel normé ", il faut comprendre, "soient E un espace vectoriel et une norme sur E que l'on notera $\|.\|$".

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé , $\|0\| = 0$.

Démonstration.
$\|0_E\| = \|0_{\mathbb{K}}.0_E\| = |0_{\mathbb{K}}| \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$. □

Corollaire de l'inégalité triangulaire. Soit E un espace vectoriel normé . Alors

$$\forall (x, y) \in E^2 \ \ |N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in E^2$. $N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y)$, donc
$N(x) - N(y) \leq N(x - y)$. En intervertissant les rôles joués par x et y, on obtient que $N(y) - N(x) \leq N(x - y)$, donc
$|N(x) - N(y)| = \max(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leq N(x - y)$. □

Définition.
Soient E un espace vectoriel normé et $u \in E$. u est unitaire si et seulement si $\|u\| = 1$.
Si $u \neq 0$, on appelle vecteur unitaire associé à u le vecteur $\dfrac{u}{\|u\|}$, qui est bien unitaire.

Définition. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction à F de la norme de E s'appelle la norme induite sur F et F muni de cette norme induite est un espace vectoriel normé .

Exemple. Sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, $|.|$ est une norme.

1.2 Les normes 1, 2 et ∞.

1.2.1 Cas des sommes finies.

Propriété. Sur $\mathbb{K}^n$, on dispose de trois normes classiques.

$$\begin{array}{llll} \|.\|_1 : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \end{array},$$

$$\begin{array}{llll} \|.\|_2 : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \end{array}, \text{ et}$$

$$\begin{array}{llll} \|.\|_\infty : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \end{array}.$$

Démonstration.
- Etude de la norme 1 :

◇ Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 \geq 0$.

◇ Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_1 = 0$. Ainsi $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$, donc pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $0 \leq |x_j| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$, ce qui prouve que $x = 0$.

◇ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. $\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda|\|x\|_1$.

◇ Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.
$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.
Ainsi $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

- Etude de la norme 2 : admis pour le moment.
- Etude de la norme ∞.

◇ Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty \geq 0$.

◇ Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_\infty = 0$. Ainsi pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $0 \leq |x_j| \leq \sup_{1\le i\le n} |x_i| = 0$, ce qui prouve que $x = 0$.

◇ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Soit $i \in \mathbb{N}_n$. $|\lambda x_i| = |\lambda||x_i| \leq |\lambda|\|x\|_\infty$, donc $|\lambda|\|x\|_\infty$ est un majorant de $\{|\lambda x_i|/i \in \mathbb{N}_n\}$. Ainsi (1) : $\|\lambda x\|_\infty \leq |\lambda|\|x\|_\infty$.
Supposons que $\lambda \neq 0$. Soit $i \in \mathbb{N}_n$. $|x_i| = \frac{1}{|\lambda|}|\lambda x_i| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda x\|_\infty$, donc $\frac{1}{|\lambda|}\|\lambda x\|_\infty$ est un majorant de $\{|x_i|/i \in \mathbb{N}_n\}$. Ainsi $\|x\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda x\|_\infty$.
On peut aussi démontrer cette dernière inégalité en appliquant (1) au couple $(\frac{1}{\lambda}, \lambda x)$.

Pour $\lambda = 0$, $\|0x\|_\infty = 0 = |0|\|x\|_\infty$, donc, dans tous les cas, $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$.
$\diamond$ Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ est un majorant de $\{|x_i + y_i|/i \in \mathbb{N}_n\}$. Ainsi $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
Ainsi $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. $\square$

Remarque. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on peut définir

$$\|.\|_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

et montrer que c'est une norme sur $\mathbb{K}^n$, mais ce résultat est hors programme . La définition de la norme infinie se justifie alors par le résultat suivant.

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty.$$

Démonstration.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$, donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.
De plus, $\|x\|_p \leq (n\|x\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty e^{\frac{\ln(n)}{p}} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty$. Ainsi, le principe des gendarmes permet de conclure. $\square$

Propriété. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, ..., E_p p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de normes respectivement notées $\|.\|_1$, ..., $\|.\|_p$. Alors $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ est un espace vectoriel normé si on le munit de l'une des normes classiques suivantes.

$$N_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & N_1(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|_i \end{array},$$

$$N_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|_i^2} \end{array}, \text{ et}$$

$$N_\infty : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_i \end{array}.$$

Démonstration.
Exercice. $\square$

1.2.2 Cas des intégrales sur un intervalle compact

Propriété. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on dispose de trois normes classiques.

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_1 : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx \end{array},$$

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_2 : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2dx} \end{array}, \text{ et}$$

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_\infty : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{array}.$$

Démonstration.

- Etude de la norme 1 :

$\diamond$ Pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|f\|_1 \geq 0$.

$\diamond$ Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ tel que $\|f\|_1 = 0$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0$. Or $x \longmapsto |f(x)|$ est une application continue et positive sur $[a,b]$ donc $f = 0$.

$\diamond$ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. $\|\lambda f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |\lambda f(x)|dx = |\lambda|\|f\|_1$.

$\diamond$ Soient $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

$\|f+g\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)dx \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Ainsi $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

- Etude de la norme 2 : admis.
- Etude de la norme ∞ :

$\diamond$ Pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|f\|_\infty \geq 0$.

$\diamond$ Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ tel que $\|f\|_\infty = 0$. Ainsi pour tout $x \in [a,b]$,
$0 \leq |f(x)| \leq \sup_{y\in[a,b]} |f(y)| = 0$, donc $f = 0$.

$\diamond$ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Soit $x \in [a,b]$. $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_\infty$, donc $|\lambda|\|f\|_\infty$ est un majorant de $\{|\lambda f(x)|/x \in [a,b]\}$. Ainsi (1) : $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\|f\|_\infty$.

Supposons que $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [a,b]$. $|f(x)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$, donc $\dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x)|/x \in [a,b]\}$. Ainsi $\|f\|_\infty \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$.

On peut aussi démontrer cette dernière inégalité en appliquant (1) au couple $(\dfrac{1}{\lambda}, \lambda f)$.

Pour $\lambda = 0$, $\|0f\|_\infty = 0 = |0|\|f\|_\infty$, donc, dans tous les cas, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.

$\diamond$ Soient $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Soit $x \in [a,b]$. $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x)+g(x)|/x \in [a,b]\}$. Ainsi $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ainsi $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. □

1.3 Distance

Définition. Soit E un espace vectoriel normé . On appelle distance associée à la norme $\|.\|$ de E, l'application $d : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$.

Définition. Soient E un espace vectoriel normé dont la distance associée est notée d et A une partie de E. La restriction de d à A^2 est appelée la distance induite par d sur A.

Propriété. Avec les notations précédentes, pour tout $x, y, z \in E$,
— $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$ (positivité) ;
— $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation) ;
— $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
— $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Démonstration.
Les trois premières propriétés sont simples à établir.
Pour l'inégalité triangulaire, fixons $(x, y, z) \in E^3$.
$d(x, z) = \|z-x\| = \|(z-y)+(y-x)\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| = d(x, y) + d(y, z)$. □

Définition. On appelle espace métrique tout couple (E, d) où E est un ensemble et où $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application telle que, pour tout $x, y, z \in E$,
— $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation) ;
— $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
— $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Ainsi un espace vectoriel normé muni de la distance associée à sa norme est un espace métrique, mais il existe des espaces métriques qui ne sont pas des espaces vectoriels normés.
Sauf indication du contraire, les propriétés énoncées et démontrées dans le cadre des espaces vectoriels normés sont encore valables dans le cadre plus général des espaces métriques (ce sera évident dans les nombreux cas où seule la distance associée à la norme intervient), cependant, nous nous contenterons du cadre des espaces vectoriels normés qui seul est au programme.
En fait, une certaine classe d'espaces métriques est au programme. Ce sont les (A, d_A) où A est une partie d'un espace vectoriel normé E et où d_A est la distance induite sur A par la distance associée à la norme de E.

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé dont la distance associée est notée d.
Alors $\forall (x, y, z) \in E^3 \;\; d(x+z, y+z) = d(x, y)$.
Cette propriété ne se généralise pas aux espaces métriques.

Propriété. Corollaire de l'inégalité triangulaire. Soit E un espace vectoriel normé dont la distance associée est notée d.
Alors $\forall (x, y, z) \in E^3 \;\; |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$.

Démonstration.
Soit $(x,y,z) \in E^3$. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, donc $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$.
En intervertissant x et z, on obtient que $d(z,y) - d(y,x) \leq d(z,x)$,
donc $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$. □

Définition. Soient E un espace vectoriel normé et $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$.
La boule ouverte centrée en a de rayon r est l'ensemble $B_o(a,r) = \{x \in E / d(a,x) < r\}$.
La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble $B_f(a,r) = \{x \in E / d(a,x) \leq r\}$.
La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E / d(a,x) = r\}$.

Définition. Soit E un espace vectoriel normé.
On appelle boule unité de E la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Exemple. Etudions les formes des boules unités de $\mathbb{R}^2$ muni respectivement des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
• Pour $\|.\|_2$, la boule unité est $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. Il s'agit du disque de centre O et de rayon 1.
• Pour $\|.\|_1$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 1\}$, donc $B \cap \mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 / x + y \leq 1\}$. Ainsi $B \cap \mathbb{R}_+^2$ est l'intérieur du triangle délimité par les axes et par la droite $x + y = 1$. Le reste de B s'obtient en appliquant à $B \cap \mathbb{R}_+^2$ les symétries par rapport aux axes et par rapport à O.
• Pour $\|.\|_\infty$, $B \cap \mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 / x \leq 1 \text{ et } y \leq 1\}$, donc $B \cap \mathbb{R}_+^2$ est l'intérieur du carré dont les sommets sont les points de O, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. Le reste de B s'obtient en appliquant à $B \cap \mathbb{R}_+^2$ les symétries par rapport aux axes et par rapport à O.

Propriété. (non généralisable aux espaces métriques) Les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

Démonstration.
Soient E un espace vectoriel normé et $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B_o(a,r)$ est convexe (la démonstration est similaire pour les boules fermées).
Soient $(x,y) \in B_o(a,r)^2$ et $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} d(a, tx + (1-t)y) &= \|tx + (1-t)y - (ta + (1-t)a)\| \\ &\leq t\|x - a\| + (1-t)\|y - a\| \\ &< tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

donc $[x,y] \subset B_o(a,r)$. □

Définition. Soient E un espace vectoriel normé , A une partie non vide de E et $a \in E$.
On note $d(a,A) = \inf\limits_{x \in A} d(a,x)$. C'est la distance de a à A.

Démonstration.
$\{d(a,x) / x \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, donc elle admet une borne inférieure. Ainsi $d(a,A)$ est correctement défini. □

Définition. Soient E un espace vectoriel normé , A et B deux parties non vides de E. On note $d(A,B) = \inf\limits_{(x,y) \in A \times B} d(x,y)$. C'est la distance de A à B.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $d(a, \mathbb{Q}) = 0$.

Définition. Soient E un espace vectoriel normé , A une partie non vide de E.
On appelle diamètre de A la quantité $\delta(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A^2} d(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Propriété. Soient E un espace vectoriel normé et $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. $\delta(B_f(a, r)) \leq 2r$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in B_f(a, r)^2$. $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq 2r$, donc $2r$ est un majorant de $\{d(x, y)/(x, y) \in B_f(a, r)^2\}$. Ainsi $\delta(B_f(a, r)) \leq 2r$. $\square$

Propriété. (non généralisable aux espaces métriques) Soient E un espace vectoriel normé non nul et $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Alors $\delta(B_f(a, r)) = 2r$.

Démonstration.
E étant non nul, il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Notons e le vecteur unitaire associé à x_0. $d(a + re, a - re) = 2r$ et $(a + re, a - re) \in B_f(a, r)^2$, donc $\delta(B_f(a, r)) \geq 2r$. $\square$

Propriété. Soient E un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E telles que $\emptyset \neq A \subset B$. Alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Démonstration.
$\{d(x, y)/(x, y) \in A^2\} \subset \{d(x, y)/(x, y) \in B^2\}$, donc $\delta(A) \leq \delta(B)$. $\square$

Définition et propriété. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\{\|x\|/x \in A\}$ est borné.

ii) Pour tout $x_0 \in E$, $\{\|x - x_0\|/x \in A\}$ est borné.

iii) Pour tout $x_0 \in E$, il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B_f(x_0, R)$.

iv) Il existe $(x_0, R) \in E \times \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B_f(x_0, R)$.

Dans ce cas, on dit que A est bornée.

Démonstration.
Soit $(x_0, x_1) \in E^2$. Pour tout $x \in E$, $\|x - x_1\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0 - x_1\|$, donc si $\{\|x - x_0\|/x \in A\}$ est borné, alors $\{\|x - x_1\|/x \in A\}$ est borné. $\square$

Exemple. Les boules sont bornées mais les droites affines ne sont pas bornées.

Démonstration.
Soit D une droite affine passant par $a \in E$ et dirigée par le vecteur unitaire e.
$d(a, a + \lambda e) = \lambda$, donc aucune boule fermée centrée en a ne contient D. Ainsi D n'est pas bornée. $\square$

Définition. Soient A un ensemble, E un espace vectoriel normé et $f\ : A \longrightarrow E$ une application. On dit que f est bornée si et seulement si $f(A)$ est une partie bornée de E.

Propriété. Soient A un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé . On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E.
Pour $f \in \mathcal{B}(A, E)$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a\in A} \|f(a)\|$.
$(\mathcal{B}(A, E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé .

Démonstration.
- L'application identiquement nulle est un élément de $\mathcal{B}(A,E)$, donc $\mathcal{B}(A,E) \neq \emptyset$.

Soit $(f,g,\alpha,\beta) \in \mathcal{B}(A,E)^2 \times \mathbb{K}^2$. Pour tout $a \in A$,
$\|(\alpha f+\beta g)(a)\| \leq |\alpha|\|f(a)\|+|\beta|\|g(a)\| \leq |\alpha|\|f\|_\infty+|\beta|\|g\|_\infty$, donc $(\alpha f+\beta g) \in \mathcal{B}(A,E)$.
Ainsi $\mathcal{B}(A,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,E)$.
- De plus, d'après ce qui précède, $\|\alpha f + \beta g\|_\infty \leq |\alpha|\|f\|_\infty + |\beta|\|g\|_\infty$, d'où l'on peut déduire l'inégalité triangulaire.

Pour tout $f \in \mathcal{B}(A,E)$, $\|f\|_\infty \geq 0$.
Soit $f \in \mathcal{B}(A,E)$ tel que $\|f\|_\infty = 0$. Ainsi pour tout $x \in A$,
$0 \leq \|f(x)\| \leq \sup\limits_{y\in A} \|f(y)\| = 0$ et $f = 0$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{B}(A,E)$. Soit $x \in A$. $\|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\| \leq |\lambda|\|f\|_\infty$, donc $|\lambda|\|f\|_\infty$ est un majorant de $\{\|\lambda f(x)\|/x \in A\}$. Ainsi (1) : $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\|f\|_\infty$.
Supposons que $\lambda \neq 0$. Soit $x \in A$. $\|f(x)\| = \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f(x)\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$, donc $\dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ est un majorant de $\{\|f(x)\|/x \in A\}$. Ainsi $\|f\|_\infty \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$.
On peut aussi démontrer cette dernière inégalité en appliquant (1) au couple $(\dfrac{1}{\lambda}, \lambda f)$.
Pour $\lambda = 0$, $\|0f\|_\infty = 0 = |0|\|f\|_\infty$, donc, dans tous les cas, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. □

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé . On note $l^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(E)$, on note $\|(x_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$.
$(l^\infty(E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé .
Démonstration.
Exercice. □

1.4 Applications k-lipschitziennes

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : E \longrightarrow F$ une fonction dont le domaine de définition sera noté $\mathcal{D}_f$. f est k-lipschitzienne si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f^2 \ \ d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y).$$

Lorsque $k < 1$, on dit que f est k-contractante.

Propriété. La composée d'une application k-lipschitzienne et d'une application k'-lipschitzienne est une application kk'-lipschitzienne.

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé . L'application $\|.\|$ est 1-lipschitzienne.
Démonstration.
Soit $(x,y) \in E^2$. $d(\|x\|,\|y\|) = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$. □

Propriété. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

Démonstration.
Soit $(x,y)\in E^2$. Soit $a\in A$. $d(x,A)\leq d(x,a)\leq d(x,y)+d(y,a)$, donc $d(x,A)-d(x,y)$ est un minorant de $\{d(y,a)/a\in A\}$. Ainsi $d(x,A)-d(x,y)\leq d(y,A)$.
Donc $d(x,A)-d(y,A)\leq d(x,y)$.
En intervertissant les rôles joués par x et y, on obtient que $d(y,A)-d(x,A)\leq d(x,y)$, donc $|d(x,A)-d(y,A)|=\max(d(x,A)-d(y,A),d(y,A)-d(x,A))\leq d(x,y)$. □

Propriété. Soient $p\in\mathbb{N}^*$, E_1, …, E_p p espaces vectoriels normés dont les normes sont notées N_1, …, N_p. On note $E=E_1\times\cdots\times E_p$.
Soit $i\in\mathbb{N}_p$. L'application $i^{\text{ème}}$ projection $p_i:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_i \\ x=(x_1,\ldots,x_p) & \longmapsto & x_i\end{array}$ est 1-lipschitzienne lorsque E est muni de l'une de ses trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.

Démonstration.
Exercice. □

Remarque. Sur $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f\longmapsto f(0)$ n'est pas lipschitzienne pour N_1.

Démonstration.
Soit $k\in\mathbb{R}_+$. Supposons que cette application est k-lipschitzienne.
Ainsi, pour tout $f\in E$, $|f(0)|\leq k\int_0^1|f(t)|dt$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons f_n le vecteur de E défini par les relations suivantes : pour tout $t\in[0,\frac{1}{n}]$ $f(t)=1-nt$ et pour tout $t\in[\frac{1}{n},1]$ $f(t)=0$.
$1=|f_n(0)|\leq k\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt=\frac{k}{2n}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2n\leq k$, ce qui est faux. □

1.5 Normes équivalentes

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. On dit que ces deux normes sont équivalentes si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que

$$\forall x\in E\ \ \|x\|_1\leq\alpha\|x\|_2 \text{ et } \|x\|_2\leq\beta\|x\|_1.$$

Propriété. Avec les notations précédentes, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si $Id_E\ :(E,\|.\|_1)\longrightarrow(E,\|.\|_2)$ et $Id_E\ :(E,\|.\|_2)\longrightarrow(E,\|.\|_1)$ sont lipschitziennes.

Exemple. Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et E_1, …, E_p p espaces vectoriels normés dont les normes sont notées N_1, …, N_p. On note $E=E_1\times\cdots\times E_p$. Les trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Démonstration.
Soit $x=(x_1,\ldots,x_p)\in E$. $\|x\|_\infty^2\leq\|x\|_2^2$,
$\|x\|_2^2=\displaystyle\sum_{i=1}^p N_i(x_i)^2\leq(\sum_{i=1}^p N_i(x_i))^2=\|x\|_1^2$ et $\|x\|_1\leq p\|x\|_\infty$, ainsi
$\|.\|_\infty\leq\|.\|_2\leq\|.\|_1\leq p\|.\|_\infty$. □

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé. Sur l'ensemble des normes de E, la relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur E.
Une partie A de E est bornée pour $\|.\|_1$ si et seulement si elle est bornée pour $\|.\|_2$ (cependant le diamètre de A n'est pas le même pour $\|.\|_1$ et pour $\|.\|_2$).
Démonstration.
Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\forall x \in E \;\; \|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.
Si A est bornée pour $\|.\|_1$ il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B_f^{\|.\|_1}(O, R) \subset B_f^{\|.\|_2}(O, \beta R)$, donc A est bornée pour $\|.\|_2$. $\square$

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est muni de deux normes équivalentes, notées $\|.\|_1^E$ et $\|.\|_2^E$. On suppose également que F est muni de deux normes équivalentes, notées $\|.\|_1^F$ et $\|.\|_2^F$.
Alors $f \; : E \longrightarrow F$ est lipschitzienne pour $\|.\|_1^E$ et $\|.\|_1^F$ si et seulement si elle est lipschitzienne pour $\|.\|_2^E$ et $\|.\|_2^F$.
Démonstration.
Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_1^E \leq \alpha\|x\|_2^E$ et $\|x\|_2^E \leq \beta\|x\|_1^E$.
Il existe $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}_+^2$ tel que, pour tout $x \in F$, $\|x\|_1^F \leq \alpha'\|x\|_2^F$ et $\|x\|_2^F \leq \beta'\|x\|_1^F$.
Si f est k-lipschitzienne pour $\|.\|_1^E$ et $\|.\|_1^F$, pour tout $(x, x') \in E^2$,
$\|f(x) - f(x')\|_2^F \leq \beta' k\|x - x'\|_1^E \leq \beta'\alpha k\|x - x'\|_2^E$, donc f est lipschitzienne pour $\|.\|_2^E$ et $\|.\|_2^F$. $\square$

Remarque. Deux normes équivalentes se comportent de la même façon relativement aux notions déjà introduites dans ce chapitre et à celles que l'on étudiera par la suite. On démontrera plus loin que si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, si bien que sur un espace vectoriel normé de dimension finie, le plus souvent, il n'est pas nécessaire de préciser la norme utilisée.

2 Suites dans un espace vectoriel normé

Notation. Pour tout ce chapitre, on fixe un espace vectoriel normé noté E, sa norme étant notée $\|.\|$ et sa distance associée d.

Définition. Une suite d'éléments de E est une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$, que l'on note sous la forme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, par abus, sous la forme (x_n) : dans ce contexte, n est une variable muette, la suite (x_p) est égale à la suite (x_n).
On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E.
Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par la suite (x_n) est appelé son support.

2.1 Convergence d'une suite

Définition. Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $l \in E$. La suite (x_n) converge vers l si et seulement si

$$\boxed{(1)\ :\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Longrightarrow d(x_n, l) \leq \varepsilon).}$$

Ainsi la suite (x_n) converge vers le vecteur l si et seulement si , pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, la distance de x_n à l est inférieure à ε.

Exemple. $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En effet, si $\varepsilon > 0$, posons $N = 1 + \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq N$. Alors $n \geq N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, donc $0 \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

ATTENTION L'écriture "$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$" n'a aucun sens : la limite ne dépend pas de n.

Propriété. Soit (x_n) et (y_n) deux suites de vecteurs de E qui sont égales à partir d'un certain rang, c'est-à-dire pour lesquelles, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n = y_n$. Alors, pour tout $\ell \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E seulement définie à partir du rang n_0. D'après la propriété précédente, l'assertion "$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$" ne dépend pas du choix de $x_0, \ldots, x_{n_0-1}$ utilisé pour prolonger $(x_n)_{n\geq n_0}$ en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété. Unicité de la limite.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $(l, l') \in E^2$.
Si (x_n) converge vers l et vers l', alors $l = l'$.
Dans ce cas, l est appelé la limite de la suite (x_n). On la note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
On note également $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(N, N') \in \mathbb{N}^2$ tel que pour tout $n \geq N$ $d(x_n, l) \leq \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'$ $d(x_n, l') \leq \varepsilon$. Pour $p = max(N, N')$,
$d(l, l') \leq d(l, x_p) + d(x_p, l') \leq 2\varepsilon$.
Ainsi $d(l, l')$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$, donc $d(l, l') = 0$ et $l = l'$. □

Remarque. La seconde notation est plus simple d'emploi que la première. En effet, on ne peut écrire "$l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$" qu'après avoir montré l'existence de la limite, alors que l'écriture "$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$" exprime l'existence de la limite et le fait qu'elle vaut l.

Remarque. Dans (1), les deux dernières inégalités peuvent être choisies indifféremment strictes ou larges.

Démonstration.
• Montrons que
$(1) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon)$.

"$\Longleftarrow$" est simple à établir.
Supposons (1). Soit $\varepsilon > 0$. $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $d(x_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

• Montrons que (1)$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n > N \Longrightarrow d(x_n, l) \leq \varepsilon)$.
"$\Longrightarrow$" est simple à établir.
Supposons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n > N \Longrightarrow d(x_n, l) \leq \varepsilon)$.
Soit $\varepsilon > 0$. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $d(x_n, l) \leq \varepsilon$. Ainsi, en posant $N' = N + 1$, pour tout $n \geq N'$, $d(x_n, l) \leq \varepsilon$.

• L'équivalence (1)$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n > N \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon)$ est laissée en exercice. □

Définition. Une suite de vecteurs de E est convergente si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Sinon, on dit que la suite est divergente.

Propriété. Soient (x_n) une suite de vecteurs de E et $l \in E$.
Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|l\|$, mais la réciproque est fausse.
$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $d(x_n, l) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

• Supposons que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x_n - l\| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq N$. $|\|x_n\| - \|l\|| \leq \|x_n - l\| \leq \varepsilon$, donc $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|l\|$.

• Supposons que la réciproque est vraie pour une suite (x_n) convergeant vers l. Comme $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|l\| = \|-l\|$, en utilisant la réciproque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -l$ et d'après l'unicité de la limite, $l = -l$. Ainsi $l = 0$. Donc la réciproque est fausse au moins pour toute suite convergeant vers une limite non nulle.

• Cependant, lorsque $l = 0$, la réciproque est vraie. En effet, si $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq N \Longrightarrow \|x_n\| = d_{\mathbb{R}}(\|x_n\|, 0) \leq \varepsilon)$, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• En fait, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq N \Longrightarrow |d(x_n, l) - 0| = d(x_n, l) \leq \varepsilon)$, donc si et seulement si $d(x_n, l) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Principe des gendarmes : Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.
S'il existe une suite de réels (g_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \ d(x_n, l) \leq g_n$ et $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration.
Au tableau. □

Exemple. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\cos t - 2}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Propriété. Soit N une seconde norme sur E, équivalente à $\|.\|$.
Alors, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} l$.

Démonstration.
Il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $N \leq \alpha\|.\|$ et $\|.\| \leq \beta N$.
Supposons que $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $N(x_n - l) \leq \dfrac{\varepsilon}{\beta}$. Donc pour tout $n \geq M$, $\|x_n - l\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} l$. $\square$

Exercice. Notons E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les normes de la convergence en moyenne, de la convergence en moyenne quadratique et de la convergence uniforme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n l'élément de E défini par les relations suivantes : $f_n(t) = 2nt$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{2n}]$, $f_n(t) = -2nt + 2$ pour tout $t \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 0$ pour tout $t \in [\frac{1}{n}, 1]$.
En étudiant la suite (f_n), montrer que les trois normes sont deux à deux non équivalentes.

Solution :
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Le graphe de f_n est la réunion des segments $[O, A]$, $[A, B]$ et $[B, C]$, les points O, A, B et C ayant pour coordonnées $(0, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 1)$, $(\frac{1}{n}, 0)$ et $(1, 0)$.
⋄ $\|f_n\|_\infty = 1$.
⋄ $\|f_n\|_1$ est l'aire du triangle OAB, donc $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$.
⋄ $\|f_n\|_2^2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}} (2nt)^2 dt + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (-2nt + 2)^2 dt$.
Posons $t = \frac{1}{n} - u$ dans la dernière intégrale, ce qui est possible car l'application $u \longmapsto \frac{1}{n} - u$ est de classe C^1. Ainsi,
$$\|f_n\|_2^2 = 2\int_0^{\frac{1}{2n}} (2nt)^2 dt = 8n^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{8n^2}{3} \times \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{3n}.$$
On en déduit que $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$.
• ⋄ Pour $\|.\|_\infty$, f_n ne tend pas vers 0, mais f_n tend vers 0 pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Ainsi, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes et $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ non plus.
⋄ $\sqrt{n} f_n$ tend vers 0 pour $\|.\|_1$, mais ce n'est pas le cas pour $\|.\|_2$, donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Propriété. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$ tels que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, l) \leq 1$.
Posons $R = max(1, \underset{0\leq k\leq N-1}{\max} d(x_k, l)))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, l) \leq R$, donc $\{x_n / n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(l, R)$, ce qui prouve que la suite (x_n) est bornée. $\square$

2.2 Somme et produit de limites

Propriété. (ne se généralise pas aux espaces métriques) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E convergeant vers ℓ et ℓ'. Alors la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que,
pour $n \geq N_1$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et pour $n \geq N_2$, $\|y_n - \ell'\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geq N$, par inégalité triangulaire,
$\|(x_n + y_n) - (\ell + \ell')\| \leq \|x_n - \ell\| + \|y_n - \ell'\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Propriété. (ne se généralise pas aux espaces métriques) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E telle que la suite $(x_n + y_n)$ converge. Alors (x_n) et (y_n) sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. On dit que les suites (x_n) et (y_n) ont la même nature.

Démonstration.
Si (x_n) converge, $(y_n) = ((x_n + y_n) + (-x_n))$ converge. □

Propriété. Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si l'une des suites est bornée et si l'autre tend vers 0, alors $\alpha_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.
Supposons par exemple que (α_n) est bornée et que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |a_n| \leq M$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{M}$.
Alors, pour tout $n \geq N$, $\|\alpha_n x_n\| = |\alpha_n|\|x_n\| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. □

Propriété. (ne se généralise pas aux espaces métriques) Soient (l_n) une suite de E qui converge vers $l \in E$ et (α_n) une suite de scalaires qui converge vers α. Alors la suite $(\alpha_n.l_n)$ converge vers $\alpha.l$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\|\alpha_n.l_n - \alpha.l\| = \|(\alpha_n - \alpha).l_n + \alpha.(l_n - l)\| \leq |\alpha_n - \alpha|\|l_n\| + |\alpha|\|l_n - l\|$.
(l_n) est une suite convergente, donc elle est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|l_n\| \leq M$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\alpha_n.l_n - \alpha.l\| \leq |\alpha_n - \alpha|M + |\alpha|\|l_n - l\|$, or d'après les propriétés précédentes, $|\alpha_n - \alpha|M + |\alpha|\|l_n - l\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\alpha_n l_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha l$. □

Remarque. La décomposition "$\alpha_n.l_n - \alpha.l = (\alpha_n - \alpha).l_n + \alpha.(l_n - l)$" est très souvent utilisée.

Remarque. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$, considérons la suite d'applications (f_n) définie par les relations suivantes : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$ $f_n(t) = \sqrt{n}t^n$.
$\|f_n\|_1 = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais

$\|f_n.f_n\|_1 = \|t \longmapsto nt^{2n}\|_1 = \dfrac{n}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq 0$, donc $f_n.f_n$ ne tend pas vers 0 pour $\|.\|_1$.
Ce résultat n'est pas en contradiction avec la propriété précédente car dans la propriété, le produit considéré est celui d'un scalaire par un vecteur alors que dans cet exemple, le produit considéré est celui de deux fonctions.

Propriété. L'ensemble des suites convergentes de E noté $E^{\mathbb{N}}_{cv}$ est un sous-espace vectoriel de $l^\infty(E)$ et l'application $\begin{array}{ccc} E^{\mathbb{N}}_{cv} & \longrightarrow & E \\ (x_n) & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \end{array}$ est une application linéaire.

Démonstration.
La suite identiquement nulle est un élément de $E^{\mathbb{N}}_{cv}$, donc $E^{\mathbb{N}}_{cv} \neq \emptyset$.
Si (x_n) et (y_n) convergent vers l et l', pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha(x_n) + \beta(y_n)$ converge vers $\alpha l + \beta l'$. $\square$

Propriété. Suites à valeurs dans un produit.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, ..., E_p p espaces vectoriels normés, leurs normes étant notées N_1, ..., N_p. On note $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ que l'on munit de l'une des trois normes classiques.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{1,n},\ldots,x_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $l = (l_1,\ldots,l_p) \in E$.
Alors (x_n) converge vers l si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $(x_{i,n})$ converge vers l_i.

Démonstration.
Les trois normes étant équivalentes, on peut choisir de travailler avec la norme $\|.\|_1$.
La suite (x_n) converge vers l si et seulement si
$\sum\limits_{i=1}^{p} N_i(x_{i,n} - l_i) = \|x_n - l\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$
$N_i(x_{i,n} - l_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $(x_{i,n})$ converge vers l_i. $\square$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, $(\frac{1}{n}, 2^{-n}, 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0,1)$.

Propriété. Suites à valeurs dans un espace de dimension finie.
On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie strictement positive, notée q. Soit $e = (e_1,\ldots,e_q)$ une base de E.

Soit (x_n) une suite de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \sum\limits_{i=1}^{q} x_{i,n}e_i$.

Alors, la suite (x_n) converge dans E si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, la suite $(x_{i,n})$ converge dans $\mathbb{K}$, et, dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sum\limits_{i=1}^{q} (\lim\limits_{n\to+\infty} x_{i,n})e_i$.

Démonstration.
Nous démontrerons plus tard que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il n'est pas nécessaire de préciser dans l'énoncé de cette propriété quelle norme sur E est utilisée, et, pour en faire la démonstration, on peut choisir sur E la norme que nous voulons.

Choisissons donc sur E la norme définie par la relation suivante :
pour tout $y = \sum_{i=1}^{q} y_i e_i \in E$, $\|y\| = \sum_{i=1}^{q} |y_i|$. (le fait que $\|.\|$ est effectivement une norme sur E est laissé en exercice).
Ainsi, la suite (x_n) converge vers $l = \sum_{i=1}^{q} l_i e_i$ si et seulement si
$\sum_{i=1}^{q} |x_{i,n} - l_i| = \|x_n - l\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$ $|x_{i,n} - l_i| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $(x_{i,n})$ converge vers l_i. $\square$

3 Suites de complexes

3.1 Premières propriétés

Propriété. Soit $(x_n) \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors $\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

Démonstration.
$\frac{|\ell|}{2} > 0$, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $|x_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$.
D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq M$, $|\ell| - |x_n| \leq \frac{|\ell|}{2}$, donc $|x_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N'$, $|x_n - \ell| \leq \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$.
Posons $N = \max(N', M)$. Soit $n \geq N$. $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\ell}| = \frac{|\ell - x_n|}{|x_n||\ell|} \leq \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon \times \frac{2}{|\ell|^2} = \varepsilon$. $\square$

Propriété. Soit (z_n) une suite de complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.
Alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.
Dans ce cas, on a donc $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

Démonstration.
$(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites coordonnées de (z_n) dans la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$. $\square$

3.2 Quelques suites définies par récurrence

3.2.1 Suites arithmético-géométriques

Propriété. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Soit (u_n) une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Supposons que $a \neq 1$ (sinon (u_n) est arithmétique). Il existe un unique $c \in \mathbb{C}$ tel que $c = ac + b$. Alors $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - c = a^n(u_0 - c)$.

3.2.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Propriété. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note $\chi(X) = X^2 - aX - b$. On l'appelle le polynôme caractéristique de (u_n). On note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de χ.
$\diamond$ Premier cas. Supposons que $\Delta \neq 0$.
Alors χ admet deux racines complexes distinctes que l'on notera λ_1 et λ_2.
Dans ce cas,

$$\boxed{\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.}$$

Dans le cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où $\Delta < 0$, il est parfois (mais pas toujours) utile d'écrire u_n sous une forme explicitement réelle. Or dans ce cas, $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.
Posons $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$. Alors, pour tout $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = \rho^n((C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)\sin(n\theta))$. On en déduit que

$$\boxed{\exists (D_1, D_2) \in \mathbb{R}^2\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \rho^n(D_1\cos(n\theta) + D_2\sin(n\theta)).}$$

$\diamond$ Deuxième cas. On suppose que $\Delta = 0$. Alors χ admet une racine double dans $\mathbb{K}$, notée λ. Dans ce cas,

$$\boxed{\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \lambda^n(C_1 + nC_2).}$$

Démonstration.
Au tableau. $\square$

Exemple. La suite de Fibonacci est définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Le polynôme caractéristique est égal à $X^2 - X - 1$ dont les racines sont le nombre d'or, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\dfrac{1}{\varphi}$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\dfrac{(-1)^n}{\varphi^n}$.
Les relations $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ permettent de calculer α et β. On obtient ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n}\Big)$.

3.2.3 Suites homographiques

Au tableau.

4 Suites de réels

4.1 Limites infinies

Définition. Soit (x_n) une suite de réels. On dit que x_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\forall M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ x_n \geq M$.
On dit que x_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si
$\forall M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ x_n \leq -M$.

Définition. Lorsqu'une suite de réels tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, elle est toujours divergente : on dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. On distingue ainsi trois catégories de suites réelles :
- Les suites convergentes. Ce sont celles qui convergent vers un réel.
- Les suites divergentes de première espèce. Ce sont celles qui divergent vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Toutes les autres suites. On dit qu'elles sont divergentes de seconde espèce.

Propriété. Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition. Soit (x_n) une suite d'un espace métrique E. On dit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ si et seulement si $d(x_0, x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemple. $z_n = i + n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Propriété. Composition des limites :
Soit (x_n) une suite d'un espace métrique E qui converge vers $\ell \in E \cup \{\infty\}$. Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Lorsque $E = \mathbb{R}$, si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$), alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp : $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$).

Démonstration.
Supposons que $\ell \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $d(x_n, \ell) \leq \varepsilon$.
De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq N'$.
Ainsi, pour tout $n \geq N$, $d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq \varepsilon$.
On procède de même lorsque $\ell = \infty$. □

Propriété. Soient (x_n) une suite d'éléments de E et $l \in E$.
$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration.
◇ Supposons que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. $2n \geq n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De même, $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: par composition des limites, $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
◇ Réciproquement, supposons que $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in \{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1\}$,
donc $d(x_n, l) \le d(x_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, l) + d(x_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}, l) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Propriété. Soient (x_n) une suite d'éléments de E, $l \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}$, $x_{pn+i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration.
Adapter la démonstration précédente. □

Remarque. C'est encore vrai dans le cas de limites infinies.

Propriété. Les propriétés sur les somme et produit de limites se généralisent au cas des limites infinies, sauf dans certains cas que l'on appelle des "formes indéterminées" : soit $(x_n), (y_n)$ deux suites de réels et $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \mathbb{R}$, alors $x_n + y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, alors $x_n + y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, mais $x_n - y_n$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, alors $-x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\varepsilon\infty$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$, alors $x_n y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, sauf lorsque $\ell = 0$, qui est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon'\infty$, alors $x_n y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\varepsilon'\infty$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ alors $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ alors $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. La forme indéterminée du type $0 \times \infty$ se décline aussi sous les formes $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

Exemples :
— $u_n = (n + \frac{1}{n})^2 - n^2$: c'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
En développant, $u_n = 2 + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
— $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, en utilisant la quantité conjuguée.
— $u_n = \dfrac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 3}$: c'est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty} = 0 \times \infty$. En factorisant, $u_n = \dfrac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{3}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Remarque. Lorsque u_n est de la forme $u_n = a_n^{b_n}$, il est indispensable d'écrire
$u_n = e^{b_n \ln a_n}$ pour étudier sa limite.
En effet, la quantité $a_n^{b_n}$ admet trop de formes indéterminées : ∞^0, 0^0 et la sournoise $1^{+\infty}$.
Par exemple, $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

4.2 limites et relation d'ordre

Principe des gendarmes : Soit $(p_n), (g_n), (g'_n)$ trois suites de **réels** telles que
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq p_n \leq g'_n$;
- Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $g'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Alors $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que,
pour tout $n \geq N_1$, $|g_n - \ell| \leq \varepsilon$ et pour tout $n \geq N_2$, $|g'_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$:
$\ell - \varepsilon \leq g_n \leq p_n \leq g'_n \leq \ell + \varepsilon$, donc $-\varepsilon \leq p_n - \ell \leq \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|p_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Le principe des gendarmes s'adapte aux cas des limites infinies :
Principe des gendarmes : Soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y_n$ et si $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$ et si $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Lemme du tunnel : Soit (u_n) une suite de réels qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < \ell < b$.
Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a < u_n < b$.
On dit que "$u_n \in]a, b[$ à partir d'un certain rang".

Démonstration.
Posons $\varepsilon = \min(\ell - a, b - \ell)$. $\varepsilon > 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$.
Soit $n \geq N$: $a \leq \ell - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \leq b$. □

Exemple. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

ATTENTION ! C'est faux avec des inégalités larges.

Propriété. Passage à la limite dans une inégalité **large**.
Soit (a_n) et (b_n) deux suites convergentes de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Démonstration.
Posons $x_n = b_n - a_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
Il s'agit de montrer que $\ell \geq 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$.
En particulier, $x_N - \ell \leq \varepsilon$, donc $\ell \geq x_N - \varepsilon \geq -\varepsilon$.
C'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\ell \geq 0$. □

Remarque. Cette propriété est encore vraie avec les limites égales à $\pm\infty$.

Remarque. Avec les notations précédentes, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$, l'inégalité stricte n'est pas a priori conservée en passant à la limite.
Par exemple, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} > 0$, mais on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Propriété. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(X) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).

4.3 Suites monotones

Théorème de la limite monotone : Soit (x_n) une suite croissante de réels.
Si (x_n) est majorée, alors cette suite est convergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Si (x_n) n'est pas majorée, alors cette suite est divergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
Ainsi, dans tous les cas, on peut écrire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Démonstration.
◇ *Premier cas :* supposons que (x_n) est majorée. $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc d'après la propriété de la borne supérieure, on peut poser $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < x_N \leq \ell$. Soit $n \geq N$. Alors $x_N \leq x_n \leq \ell$, donc $\ell - \varepsilon < x_n \leq \ell$.
On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0\ , \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |x_n - \ell| < \varepsilon$.
◇ *Deuxième cas :* supposons que (x_n) n'est pas majorée. Soit $A > 0$. A ne majore pas la suite (x_n), donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \geq A$. Alors, pour tout $n \geq N$, $x_n \geq A$.
Ceci montre que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Théorème. Soit (x_n) une suite décroissante de réels.
Si (x_n) est minorée, alors cette suite est convergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Si (x_n) n'est pas minorée, alors cette suite est divergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.
Ainsi, dans tous les cas, on peut écrire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Démonstration.
Appliquer le théorème précédent à la suite $-x_n$ qui est croissante, ou bien adapter la démonstration précédente. □

Exemple. Une suite arithmétique de raison r tend vers $+\infty$ lorsque $r > 0$ et vers $-\infty$ lorsque $r < 0$.

Propriété. Soit (x_n) une suite géométrique de réels de raison a, tel que $x_0 \neq 0$.
Notons ε le signe de x_0.
- Si $|a| < 1$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $a = 1$, x_n est constante.
- Si $a > 1$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$.
- Si $a \leq -1$, (x_n) diverge.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a^n x_0$.

— Supposons que $|a| < 1$. Alors $|x_{n+1}| = |a||x_n| \leq |x_n|$, donc la suite $(|x_n|)$ est décroissante et minorée par 0. Ainsi, il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Alors $|x_{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, par composition des limites, et $|x_{n+1}| = |a||x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |a|\ell$. Par unicité de la limite, $\ell = |a|\ell$, donc $\ell = 0$.
— Supposons que $a > 1$. Alors la suite $(\frac{1}{x_n})$ est géométrique de raison $\frac{1}{a}$ avec $|\frac{1}{a}| < 1$, donc $\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus $\frac{x_n}{x_0}$ est une suite positive, donc $\frac{x_n}{x_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
— Supposons que $a < -1$. Alors $(|x_n|)$ est géométrique de raison $|a|$ avec $|a| > 1$, donc $|x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve que la suite (x_n) est divergente.
— Lorsque $x = -1$, la suite (x_n) est égale à $((-1)^n)$: elle diverge.

□

Remarque. Soit (x_n) une suite géométrique de complexes, de raison $a \in \mathbb{C}$. Alors la suite de réels $(|x_n|)$ est géométrique de raison $|a|$, donc lorsque $|a| < 1$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et lorsque $|a| > 1$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On sait que x est approché par le nombre décimal $x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$.
On a $|x - x_n| \leq 10^{-n}$, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Exemple. Reprenons l'exemple de la suite de Fibonacci. On a vu qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha\lambda^n + \beta\dfrac{(-1)^n}{\lambda^n}$, où $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on calcule que $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, donc $F_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.

4.4 Suites adjacentes

Définition. Soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels.
On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si
— l'une est croissante,
— l'autre est décroissante
— et $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème. Supposons que (x_n) et (y_n) sont deux suites adjacentes, où (x_n) est croissante.
Alors ces deux suites convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.
De plus, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $x_p \leq \ell \leq y_q$.

Démonstration.
En tant que suite convergente, $(x_n - y_n)$ est majorée, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - y_n \leq A$. Ainsi, $x_n \leq A + y_n \leq A + y_0$, car la suite (y_n) est décroissante. (x_n) est donc une suite croissante majorée. De même, on montre que (y_n)

est décroissante minorée. Ainsi (x_n) et (y_n) convergent. De plus, $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. En notant ℓ cette limite commune,
$\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$, donc pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $x_p \leq l \leq y_q$. $\square$

Théorème des segments emboîtés : Un segment dans $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, décroissante au sens de l'inclusion, dont les longueurs tendent vers 0. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \leq b_n$ et $I_n = [a_n, b_n]$.
$I_{n+1} \subset I_n$, donc $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. De plus la longueur de I_n est égale à $b_n - a_n$, donc les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell \leq b_n$, donc $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$, donc en passant à la limite, $\ell \leq x \leq \ell$, puis $x = \ell$. $\square$

5 Les suites extraites

Notation. Jusqu'à la fin de ce cours, on fixe un espace vectoriel normé noté E, sa norme étant notée $\|.\|$ et sa distance associée d.

Définition. Soit (x_n) une suite de vecteurs de E. On appelle sous-suite ou suite extraite de (x_n) toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
On dit alors que φ est une extraction ou bien une extractrice. On dira aussi que $(x_{\varphi(n)})$ est une extraction de (x_n).

Propriété. Si la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge, toute suite extraite de (x_n) converge vers la même limite.

Démonstration.
On suppose qu'il existe $l \in E$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. $\varphi(n) \geq n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition des limites, $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. $\square$

Remarque. Cette propriété se généralise au cas des limites infinies.

Propriété. Une suite extraite d'une suite extraite de $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est encore une suite extraite de (x_n).

Démonstration.
Soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (x_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
posons $y_n = x_{\varphi(n)}$. Une suite extraite de (y_n) est une suite de la forme $(y_{\Psi(n)})$, où $\Psi\ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{\Psi(n)} = x_{\varphi(\Psi(n))} = x_{\varphi\circ\Psi(n)}$, or $\varphi \circ \Psi$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, donc la suite $(y_{\Psi(n)})$ est une suite extraite de (x_n). □

Définition. Soit (x_n) une suite de points de E.
On appelle valeur d'adhérence de la suite (x_n) toute limite d'une suite extraite de (x_n).

Remarque. La limite d'une suite convergente est son unique valeur d'adhérence.
Si une suite admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, elle est divergente.

Exemple. Soit $(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique de complexes de période $p \in \mathbb{N}^*$. C'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+p} = x_n$. Alors les valeurs d'adhérence de (x_n) sont x_0, x_1, ..., x_{p-1}.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n + \dfrac{1}{n+1}$. Les valeurs d'adhérence de (y_n) sont encore x_0, x_1, ..., x_{p-1}.

Démonstration.
• Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$. La suite $(x_{np+i})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de (x_n). De plus elle est constante et égale à x_i, donc elle converge vers x_i. Ainsi x_i est une valeur d'adhérence de (x_n).
Réciproquement, soit $a \in \mathbb{C}$ une valeur d'adhérence de (x_n). il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers a. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que α est strictement inférieur à toutes les distances entre deux éléments distincts de $\{x_0, \dots, x_{p-1}\}$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \frac{\alpha}{2}$.
Il existe $i_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $x_{\varphi(N)} = x_{i_0}$.
Soit $n \geq N$. Supposons que $x_{\varphi(n)} = x_{i_0}$. Alors
$d(x_{\varphi(n+1)}, x_{i_0}) \leq d(x_{\varphi(n+1)}, a) + d(a, x_{\varphi(n)}) \leq \alpha$, donc par définition de α, $x_{\varphi(n+1)} = x_{i_0}$.
Ainsi, on montre par récurrence que la suite $(x_{\varphi(n)})$ stationne sur x_{i_0}, donc $a = x_{i_0}$.
• Si $\varphi\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + \dfrac{1}{\varphi(n)+1}$, donc $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ ont même nature et, en cas de convergence, même limite. On en déduit que les deux suites (x_n) et (y_n) ont le même ensemble de valeurs d'adhérence.
□

Propriété. (hors programme).
Soient (x_n) une suite de vecteurs de E et $a \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est une valeur d'adhérence de (x_n).
ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ \ d(x_n, a) < \varepsilon$.
iii) $\forall \varepsilon > 0\ \ Card(\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a, \varepsilon)\}) = +\infty$.

Démonstration.
• Commençons par montrer que $ii) \Longleftrightarrow iii)$.

$\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a,\varepsilon)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, donc elle est de cardinal infini si et seulement si elle n'est pas majorée, c'est-à-dire si et seulement si aucun $N \in \mathbb{N}$ ne majore $\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a,\varepsilon)\}$. Ainsi, $Card(\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a,\varepsilon)\}) = +\infty$ si et seulement si, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in B_o(a,\varepsilon)$, c'est-à-dire tel que $\|x_n - a\| < \varepsilon$.

• Montrons que $i) \Longrightarrow iii)$.

Supposons que a est une valeur d'adhérence de (x_n). Ainsi il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N\ \ d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon$, donc $\varphi([N,+\infty[\cap\mathbb{N}) \subset \{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a,\varepsilon)\}$, or φ est injective et $[N,+\infty[\cap\mathbb{N}$ est un ensemble de cardinal infini, donc on a prouvé $iii)$.

• Montrons que $ii) \Longrightarrow i)$.

Supposons que $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \geq N\ \ d(x_n, a) < \varepsilon$.

Avec $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe $\varphi(0) \geq 0$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, a) \leq 1$.

Puis avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(1)}, a) \leq \frac{1}{2}$.

Pour $k \geq 1$, supposons construits $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(k)$ des entiers tels que $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ et $\forall h \in \{0,\ldots,k\}\ \ d(x_{\varphi(h)}, a) \leq \dfrac{1}{h+1}$.

Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{k+2}$ et $N = \varphi(k)+1$, il existe $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $d(x_{\varphi(k+1)}, a) \leq \dfrac{1}{k+2}$.

On construit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, donc a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n). □

Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas réel :

Toute suite bornée de **réels** possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: $X_n \stackrel{\Delta}{=} \{x_p/p \geq n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par b, donc on peut poser $y_n = \sup(X_n)$.

De plus, $\{x_p/p \geq n+1\} \subset \{x_p/p \geq n\}$, donc $y_{n+1} \leq y_n$. Ainsi (y_n) est une suite décroissante minorée par a. Elle converge vers une limite notée $y \in [a,b]$.

Montrons que y est une valeur d'adhérence de (x_n) :

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$: d'après la propriété précédente, il s'agit de montrer qu'il existe $k \geq N$ tel que $d(x_k, y) \leq \varepsilon$.

Or $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$, donc il existe $h \geq N$ tel que $d(y_h, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Mais $y_h = \sup\limits_{k\geq h} x_k$, donc $y_h - \frac{\varepsilon}{2}$ ne majore pas $\{x_k/k \geq h\}$, donc il existe $k \geq h$ tel que $y_h - \frac{\varepsilon}{2} < x_k \leq y_h$. Ainsi $d(y_h, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis $d(x_k, y) \leq d(x_k, y_h) + d(y_h, y) \leq \varepsilon$. □

Remarque. Si (x_n) est une suite de réels, on note $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$ et

$\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\inf\limits_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$. Ce sont des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$, au sens qu'il existe des extractions de (x_n) qui convergent vers ces quantités. De plus, $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ est la plus grande des valeurs d'adhérence et $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ est la plus petite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas complexe :
Toute suite bornée de **complexes** possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration.
Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Posons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$: ce sont deux suites bornées de réels.
Il existe une extraction $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel x.
La suite $(y_{\varphi(n)})$ est une suite bornée de réels, donc il existe une extraction $(y_{\varphi(\Psi(n))})$ qui converge vers un réel y.
Par composition des limites, $x_{\varphi(\Psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc $z_{\varphi(\Psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x + iy$. $\square$

Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas d'un espace vectoriel de dimension finie : On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée de vecteurs possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $e = (e_1, \ldots, e_q)$ est une base de E.
Nous démontrerons plus tard que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il n'est pas nécessaire de préciser dans l'énoncé de cette propriété quelle norme sur E est utilisée, et, pour en faire la démonstration, on peut choisir sur E la norme que nous voulons.
Choisissons donc sur E la norme définie par la relation suivante :
pour tout $y = \sum\limits_{i=1}^{q} y_i e_i \in E$, $\|y\| = \sum\limits_{i=1}^{q} |y_i|$. (le fait que $\|.\|$ est effectivement une norme sur E est laissé en exercice).
Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée de vecteurs de E.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sum\limits_{i=1}^{q} x_{n,i} e_i$.
Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$.
Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n,i}| \leq \|x_n\| \leq M$, donc les q suites de scalaires $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, ainsi que toutes leurs suites extraites.
En particulier, d'après les versions précédentes du théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction $(x_{\varphi_1(n),1})$ de la suite $(x_{n,1})$, qui converge vers un scalaire, que l'on notera ℓ_1.
La suite $(x_{\varphi_1(n),2})$ est une suite bornée de scalaires, donc il existe une extraction $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n)),2})$ qui converge vers un scalaire, que l'on notera ℓ_2.
Par récurrence, on construit ainsi q applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_i(n),i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i \in \mathbb{K}$.

Alors, d'après les propriétés du cours sur les suites extraites, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $x_{\Psi(n),i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i$, où l'on a pose $\Psi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_q$.
Ainsi, d'après le théorème d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, $x_{\Psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{q} \ell_i e_i$, ce qu'il fallait démontrer. $\Box$

6 Suites de Cauchy (hors programme)

Définition. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$.
C'est une suite de Cauchy si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall p \geq N \ \forall q \geq N \ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Propriété. Si $\|.\|'$ est une norme équivalente à $\|.\|$, une suite (x_n) de vecteurs de E est une suite de Cauchy pour $\|.\|'$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy pour $\|.\|$.

Propriété. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Démonstration.
Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$ tels que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Si $p \geq N$ et $q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x_q, x) \leq \varepsilon$. $\Box$

Propriété. Toute suite de Cauchy de E est bornée.

Démonstration.
Soit (x_n) une suite de Cauchy de E.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq 1$.
Posons $M = \max(1, \max_{0\leq n\leq N-1} d(x_n, x_N))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_N) \leq M$, donc la suite (x_n) est bornée. $\Box$

Propriété. Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Démonstration.
Soit (x_n) une suite de Cauchy de E possédant une valeur d'adhérence $a \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
a est une valeur d'adhérence de (x_n), donc il existe $q \geq N$ tel que $d(x_q, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $p \geq N$, $d(x_p, a) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, a) \leq \varepsilon$.
Ceci démontre que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. $\Box$

Définition. On dit qu'un espace métrique E est complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Théorème. Si toute suite bornée de E possède au moins une valeur d'adhérence, alors E est complet.

Démonstration.
Soit (x_n) une suite de Cauchy de E. Elle est bornée, donc elle admet une valeur d'adhérence x. On sait alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. $\square$

Théorème. Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet.

Démonstration.
C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass. $\square$

Remarque. En posant, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y| \in \mathbb{Q}_+$, on peut considérer que $\mathbb{Q}$ est un espace métrique.
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha < \alpha_n < \alpha + \frac{1}{n}$, donc $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$: en tant que suite de réels, (α_n) converge vers le réel α. Ainsi, (α_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc c'est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
Cependant, d'après l'unicité de la limite, (α_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ car $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, (α_n) est dans $\mathbb{Q}$ une suite de Cauchy qui diverge : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et $\mathbb{R}$ est une complétion de $\mathbb{Q}$: en effet, une construction classique de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ consiste à "ajouter" à $\mathbb{Q}$ les limites de ses suites de Cauchy.