Suites de vecteurs,
compléments du cours

1 Complément de la page 3

Montrons que $\|.\|_2$ est bien une norme sur $\mathbb{K}^n$.
On vérifie facilement, comme pour $\|.\|_1$, que $\|.\|_2$ est positive, définie et homogène.
Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire.

Premier cas : On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On verra lors du cours sur les espaces euclidiens, que cette norme est un cas particulier de norme euclidienne, associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ défini par :

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Donnons ici une démonstration autonome.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On souhaite d'abord montrer que $|(x|y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ (vous reconnaissez sans doute l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \|tx + y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2$, donc en développant ces carrés, $0 \leq t^2 \|x\|_2^2 + 2t(x|y) + \|y\|_2^2$. Lorsque $\|x\|_2 \neq 0$, cette dernière expression est un polynôme de degré 2 en t, constamment positif lorsque $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant Δ est négatif. Or $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|y\|_2^2 \|x\|_2^2$, donc $(x|y)^2 \leq \|x\|_2^2 \|y\|_2^2$, ce qui prouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Lorsque $\|x\|_2 = 0$, alors $x = 0$, donc cette inégalité reste vraie.
On en déduit alors l'inégalité triangulaire :

$\|x + y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x|y)$, donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$, ce qu'il fallait démontrer.

Second cas : On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$, donc $\|x + y\|_2 \leq \|x' + y'\|_2$
en posant $x' = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $y' = (|y_1|, \dots, |y_n|)$.
Or $x', y' \in \mathbb{R}^n$, donc d'après le premier cas, $\|x + y\|_2 \leq \|x'\|_2 + \|y'\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$.

2 Premier complément de la page 18

$\diamond$ Notons $S = \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$. On vérifie que S est non vide et stable par combinaison linéaire, donc S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Posons $\begin{array}{cccc} \varphi : & S & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_0, v_1) \end{array}$.
On vérifie que, pour tout $(v_n), (w_n) \in S$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi(\alpha(v_n)+(w_n)) = \alpha\varphi((v_n))+\varphi((w_n))$, donc φ est une application linéaire. De plus, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, d'après le principe de définition d'une suite par récurrence, il existe une unique suite $(v_n) \in S$ telle que $v_0 = \alpha$ et $v_1 = \beta$, c'est-à-dire telle que $\varphi((v_n)) = (\alpha, \beta)$, donc φ est une bijection. Ainsi φ est un isomorphisme, ce qui prouve que $\dim(S) = \dim(\mathbb{C}^2) = 2$.
$\diamond$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \iff (\forall n \in \mathbb{N},\ \ \lambda^{n+2} = a\lambda^{n+1} + b\lambda^n) \iff \lambda^2 = a\lambda + b$, donc $(\lambda^n) \in S$ si et seulement si $\chi(\lambda) = 0$.
$\diamond$ *Premier cas :* on suppose que $\Delta \neq 0$. On note alors λ_1 et λ_2 les deux racines complexes distinctes de χ. Montrons que (λ_1^n) et (λ_2^n) sont deux vecteurs non colinéaires de S : soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha(\lambda_1^n) + \beta(\lambda_2^n) = 0$. En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient que $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0$. Donc $\beta = -\alpha$ et $0 = \alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2$. Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$. Ainsi, la famille $((\lambda_1)^n, (\lambda_2^n))$ est une famille libre de S, or $\dim(S) = 2$, donc c'est une base de S.
Or la suite (u_n) est un vecteur de S, donc il existe bien $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ tel que
$(u_n) = C_1(\lambda_1^n) + C_2(\lambda_2^n)$, ce qu'il fallait démontrer dans ce cas.
$\diamond$ *Second cas :* on suppose que $\Delta = 0$.
On sait alors que l'unique racine de χ est $\lambda = \frac{a}{2}$.

$$\begin{aligned}(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S &\iff (\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n+2)\lambda^{n+2} = a(n+1)\lambda^{n+1} + bn\lambda^n) \\ &\iff (\forall n \in \mathbb{N},\ \ 2\lambda^{n+2} = a\lambda^{n+1}), \text{ car } (\lambda^n) \in S,\end{aligned}$$

donc $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \iff 2\lambda = a$, ce qui est vrai.
On vérifie ensuite que $((\lambda^n), (n\lambda^n))$ est une famille libre de S puis on conclut comme au premier cas.

3 Second complément de la page 18

Définition et propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.
On dit que c'est une suite homographique si et seulement si il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$.
Dans ce cas, voici une "recette" permettant de calculer u_n en fonction de n, sans se soucier d'éventuelles divisions par 0.
On note (E) l'équation suivante : $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$, en l'inconne $\ell \in \mathbb{C}$.
(E) est équivalente à une équation de degré 2.
Premier cas : On suppose que (E) possède deux racines distinctes notées α et β.
Alors en posant $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$, la suite (v_n) est une suite géométrique.
Ceci permet de calculer v_n en fonction de n puis d'en déduire u_n en fonction de n.

Second cas : Sinon, (E) admet une unique racine complexe notée α.
Alors, en posant $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$, la suite (v_n) est une suite arithmétique.
Ceci permet de calculer v_n en fonction de n puis d'en déduire u_n en fonction de n.
Démonstration.
cf DM 2. $\square$
Premier exemple : On suppose que $u_0 = 2$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n.
Solution : Nous justifierons plus tard que la suite (u_n) est bien définie.
Pour cet exemple, $(E) \iff \ell = \dfrac{\ell}{3 - 2\ell} \iff -2\ell^2 + 2\ell = 0 \iff \ell \in \{0, 1\}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ (nous justifierons plus tard que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$). Alors $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{u_n}{3-2u_n}}{\dfrac{u_n}{3-2u_n} - 1} = \dfrac{u_n}{3u_n - 3} = \dfrac{1}{3} v_n$. De plus, $v_0 = 2$,
donc $v_n = \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$. Ainsi, $3^n u_n = 2u_n - 2$, puis $u_n = \dfrac{2}{2 - 3^n}$ (on sait que $2 \neq 3^n$).
Ce résultat permet de deviner que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < 0$. Or cette propriété est simple à montrer par récurrence. Ainsi, pour être rigoureux, on commence par montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, u_n est bien défini avec $u_n < 0$. Ceci démontre que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$, ce qui valide les calculs.
Second exemple : On suppose que $u_0 = 2$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.
Exprimer u_n en fonction de n.
Solution : Nous justifierons plus tard que la suite (u_n) est bien définie. Pour cet exemple, $(E) \iff \ell = \dfrac{3\ell - 2}{2\ell - 1} \iff 2\ell^2 - \ell = 3\ell - 2 \iff 2\ell^2 - 4\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ (nous justifierons plus tard que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$). Alors $v_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} = \dfrac{2u_n - 2 + 1}{u_n - 1} = 2 + v_n$. De plus, $v_0 = 1$, donc $v_n = 2n + 1 = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Ainsi, $(2n+1)u_n - 2n - 1 = 1$, puis $u_n = \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
Ce résultat permet de deviner que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Ainsi, pour être rigoureux, on commence par montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini avec $u_n > 1$. Ceci démontre que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$, ce qui valide les calculs.
$u_0 = 2$, donc u_0 est défini et $u_0 > 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est défini et que $u_n > 1$.
Alors $u_n \neq \frac{1}{2}$, donc u_{n+1} est défini De plus, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1 + u_n - 1}{2u_n - 1} = 1 + \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

Or $u_n > 1$, donc $u_n - 1 > 0$ et $2u_n - 1 > 0$. Ainsi, $\dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1} > 0$, puis $u_{n+1} > 1$, ce qu'il fallait démontrer.

4 Complément de la page 26

4.1 Démonstration par dichotomie

Soit (u_n) une suite bornée de réels.
Il existe $m_0, M_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [m_0, M_0]$.
Posons $I_0 = [m_0, M_0]$. On coupe ce segment en son milieu en deux segments $J = [m_0, \frac{m_0+M_0}{2}]$ et $K = [\frac{m_0+M_0}{2}, M_0]$.
Si $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in J\}$ est infini, on pose $I_1 = [m_0, \frac{m_0+M_0}{2}]$.
Sinon, alors $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in K\}$ est infini et on pose $I_1 = [\frac{m_0+M_0}{2}, M_0]$.
On itère ce procédé, pour construire une suite de segments $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$: supposons construits $I_0, \ldots, I_k$ des segments tels que

— $I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0$;
— Pour tout $h \in \{0, \ldots, k\}$, la longueur de I_h est égale à $\dfrac{M_0 - m_0}{2^h}$;
— Pour tout $h \in \{0, \ldots, k\}$, $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in I_h\}$ est infini.

On note $I_k = [m_k, M_k]$ et on pose $J = [m_k, \frac{m_k+M_k}{2}]$ et $K = [\frac{m_k+M_k}{2}, M_k]$.
Si $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in J\}$ est infini, on pose $I_{k+1} = [m_k, \frac{m_k+M_k}{2}]$.
Sinon, alors $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in K\}$ est infini et on pose $I_{k+1} = [\frac{m_k+M_k}{2}, M_k]$.
Alors la suite $(I_0, \ldots, I_{k+1})$ vérifie encore les trois propriétés précédentes. Par récurrence, on construit ainsi une suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0, et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in I_k\}$ est infini.
D'après le théorème des segments emboîtés, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ est un singleton que l'on note $\{\ell\}$.
Montrons que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n).
Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la longueur de I_k est inférieure à ε. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in I_k\}$ n'est pas majoré, donc il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in I_k$. Alors u_n et ℓ sont dans I_k, donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

4.2 Démonstration par le lemme des pics (dû à Erdös)

Le lemme des pics établit que de toute suite de réels, on peut extraire une suite monotone. En particulier, lorsque la suite est bornée, on peut extraire une suite monotone et bornée qui converge donc, ce qui prouve que toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.
Soit (u_n) une suite de réels. Pour comprendre la démonstration qui suit, on peut imaginer que, dans un paysage fait d'une infinité de pics alignés d'Ouest en Est, avec au loin la mer, l'horizon et le soleil levant, u_n désigne l'altitude du n-ième pic. On considère l'ensemble des pics dont le sommet est éclairé par la lumière rasante du soleil levant.

Si cet ensemble est fini, à partir d'un certain rang N, plus aucun sommet n'est éclairé, donc chaque sommet n avec $n \geq N$ est caché par un sommet $m > n$, ce qui permet d'extraire une suite croissante. Si cet ensemble est infini, pour tout entier n, il existe $m \geq n$ tel que le pic m est éclairé, c'est-à-dire tel que tous les pics k avec $k > m$ sont d'altitudes inférieures. On peut alors extraire une suite décroissante.
Quittons la poésie et formalisons.

Premier cas : Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, il existe $p > n$ tel que $u_p > u_n$. On pose $\varphi(0) = N$. Il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} > u_{\varphi(0)}$. Puis, avec $n = \varphi(1)$, il existe $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)} > u_{\varphi(1)}$. On construit ainsi par récurrence une suite $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Second cas : Sinon, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que, pour tout $p > n$, $u_p \leq u_n$.
Avec $N = 0$, il existe donc $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p > \varphi(0)$, $u_p \leq u_{\varphi(0)}$.
Avec $N = \varphi(0) + 1$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que, pour tout $p > \varphi(1)$, $u_p \leq u_{\varphi(1)}$.
On construit ainsi par récurrence une suite $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p > \varphi(k)$, $u_p \leq u_{\varphi(k)}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)}$, donc la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.