Correction du DM 25

Merci de pré-corriger votre devoir, en tenant compte des commentaires qui suivent et en vous référant au corrigé type présent sur le site. Je vous demande ensuite de le scanner page à page, dans le bon sens et de le déposer sur mon site au format .pdf.

— Question 1 :
On peut démontrer directement que $\mathrm{Aut}(H)$ est un groupe, ou bien on peut montrer que c'est un groupe de $S(H)$, mais il ne faut pas confondre ces deux approches. De plus $\mathrm{Aut}(H)$ n'est pas un sous-groupe de H^H, car H^H est un groupe pour une loi différente de la loi de composition.

— Question 2 :
Lorsque $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, x n'est pas un entier relatif, donc la proposition $x \wedge n = 1$ n'a pas de sens. Il convient ici de noter x sous la forme $\overline{h}$, avec $h \in \mathbb{Z}$, et d'utiliser la proposition $h \wedge n = 1$.

— Question 3 :
Il s'agit de montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ & x & \longmapsto & f_x \end{array}$, où f_x est l'application $y \longmapsto xy$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même, est un isomorphisme de groupes. La surjectivité n'est pas évidente. En particulier, il est incohérent de "considérer" l'application $\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ & f_x & \longmapsto & x \end{array}$, car cela revient justement à admettre la surjectivité de φ.

— Question 4 :
Il faut montrer que "." admet un neutre et des symétriques, à gauche et à droite. En situation non commutative, il ne suffit pas de le vérifier d'un côté seulement.