

# DM 27

## Groupes abéliens de types finis

### Notation.

- Si  $E$  est un ensemble fini, on note  $|E|$  son cardinal.
- Lorsque  $(G, +)$  est un groupe abélien, on note  $0$  son élément neutre.
- Lorsque  $A$  est une partie d'un groupe  $G$ ,  
on note  $\text{Gr}(A)$  le groupe engendré par  $A$ .  
Si  $x \in G$ , on note  $\text{Gr}(x) = \text{Gr}(\{x\})$ .

### Partie I : Groupes quotients

Soit  $(G, +)$  un groupe abélien et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

On définit sur  $G$  la relation binaire  $R_H$  par :  $\forall x, y \in G, xR_Hy \iff y - x \in H$ .

1°) Montrer que  $R_H$  est une relation d'équivalence.

Soit  $a \in G$ . Déterminer la classe d'équivalence de  $a$ , que l'on notera  $\bar{a}$ .

On note  $G/H$  l'ensemble des classes d'équivalence et pour tout  $a, b \in G$ , on convient que  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ .

2°) Montrer que cette dernière égalité structure  $G/H$  comme un groupe abélien.

Montrer que, pour tout  $a \in G$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n\bar{a} = \overline{na}$ .

Quels sont les groupes de la forme  $\mathbb{Z}/H$  ?

3°) Lorsque  $G$  est de cardinal fini, montrer que  $|G| = |H| \times |G/H|$ .

### Partie II : Quelques définitions

Soit  $(G, +)$  un groupe abélien.

- On dit que  $G$  est de type fini si et seulement si il existe une partie finie  $A$  de  $G$  telle que  $G$  est le groupe engendré par  $A$ .
- On dit que  $G$  est sans torsion si et seulement si, pour tout  $x \in G \setminus \{0\}$ ,  $x$  est d'ordre infini.
- On dit que  $G$  est de torsion si et seulement si, pour tout  $x \in G$ ,  $x$  est d'ordre fini.

4°) Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes de types finis, montrer que  $G \times H$  est de type fini. En déduire que, pour tout  $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $(d_i)_{1 \leq i \leq \ell} \in \mathbb{N}^{*\ell}$ ,  $\mathbb{Z}^k \times (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$  est un groupe abélien de type fini.

5°) Pour chacun des groupes suivants, indiquer s'il est de torsion et s'il est sans torsion :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

6°) Montrer que  $G$  est de type fini et de torsion si et seulement si  $G$  est de cardinal fini.

### Partie III : Groupes abéliens finis

Dans cette partie, on suppose que  $(G, +)$  est un groupe abélien de cardinal fini. Pour tout  $x \in G$ , on note  $o(x)$  l'ordre de  $x$ .

7°) Soit  $x, y \in G$  tels que  $o(x)$  et  $o(y)$  sont premiers entre eux. Montrer que  $o(x + y) = o(x)o(y)$ .

8°) Soit  $x, y \in G$ . Montrer qu'il existe  $z \in G$  tel que  $o(z)$  est égal au plus petit commun multiple de  $o(x)$  et de  $o(y)$ .

9°) Montrer qu'il existe  $x_0 \in G$  tel que l'ordre de  $x_0$  est maximal parmi les ordres des éléments de  $G$  et montrer que, pour tout  $x \in G$ , l'ordre de  $x$  divise l'ordre de  $x_0$ .

10°) On admet temporairement le résultat suivant : pour tout groupe  $(G', +)$  abélien et fini, si  $x'_0$  est un élément de  $G'$  d'ordre maximal, alors  $G'$  est isomorphe à  $H' \times (G'/H')$ , où  $H'$  est le groupe engendré par  $x'_0$ .

Montrer qu'il existe  $\ell \in \mathbb{N}^*$  et  $d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$  tels que

- Pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $d_{i+1}$  divise  $d_i$  ;
- $G$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que  $x_0$  est un élément de  $G$  d'ordre maximal et on pose  $H = \text{Gr}(x_0)$ .

11°) Notons  $A$  l'ensemble des couples  $(K, f)$ , où  $K$  est un sous-groupe de  $G$  et où  $f$  est un morphisme de  $K$  dans  $H$ .

Si  $(K, f), (K', f') \in A$ , on convient que  $(K, f) \preceq (K', f')$  si et seulement si  $K \subset K'$  et  $f'|_K = f$ . Montrer que la relation binaire " $\preceq$ " est une relation d'ordre sur  $A$ .

Pour cette relation d'ordre, montrer que  $\{(K, f) \in A / H \subset K \text{ et } f|_H = \text{Id}_H\}$  possède un élément maximal.

On note maintenant  $(K, f)$  cet élément maximal.

Afin de montrer que  $K = G$ , on raisonne par l'absurde : on suppose que  $K$  est strictement inclus dans  $G$ . On choisit un élément  $y_0$  dans  $G \setminus K$  et on note  $K'$  le groupe engendré par  $K \cup \{y_0\}$ .

12°) Construire un morphisme injectif  $g$  de  $H$  dans  $\mathbb{U}$ , où  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ . Prolonger  $g \circ f$  en un morphisme de  $K'$  dans  $\mathbb{U}$ .

En déduire une contradiction.

13°) Montrer la propriété admise au début de la question 10.

## Partie IV : Sommes directes

Lorsque  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-groupes d'un groupe abélien  $(G, +)$ , on note  $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 / h_1 \in H_1 \text{ et } h_2 \in H_2\}$ .

On dit que la somme  $H_1 + H_2$  est directe si et seulement si, pour tout  $x \in H_1 + H_2$ , il existe un unique couple  $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$  tel que  $x = h_1 + h_2$ .

Dans ce cas, et uniquement dans ce cas, la somme  $H_1 + H_2$  est notée  $H_1 \oplus H_2$ .

**14°) a)** Lorsque  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $H_1 = \text{Gr}((2, 1))$  et  $H_2 = \text{Gr}((0, 2))$ , la somme  $H_1 + H_2$  est-elle directe ?

**b)** Lorsque  $G = \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = a\mathbb{Z}$  et  $H_2 = b\mathbb{Z}$  où  $a, b \in \mathbb{N}$ , la somme  $H_1 + H_2$  est-elle directe ?

**15°)** Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes d'un groupe abélien  $(G, +)$ .

**a)** Montrer que  $H_1 + H_2 = \text{Gr}(H_1 \cup H_2)$ .

**b)** Lorsque la somme est directe, montrer que  $H_1 \oplus H_2$  est isomorphe à  $H_1 \times H_2$ .

**16°)** Montrer que si  $H_1, H_2$  et  $H_3$  sont des sous-groupes d'un groupe abélien  $(G, +)$ , alors  $(H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + (H_2 + H_3)$ .

Si l'on suppose que  $H_1 \oplus H_2$  est directe, ainsi que  $(H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$ , montrer que  $H_2 + H_3$  est une somme directe, ainsi que la somme  $H_1 + (H_2 \oplus H_3)$ .

On peut donc écrire  $H_1 + H_2 + H_3$  au lieu de  $(H_1 + H_2) + H_3$  et  $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$  au lieu de  $(H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$ .

Plus généralement, lorsque  $H_1, \dots, H_n$  sont  $n$  sous-groupes d'un groupe abélien  $(G, +)$ , on admettra que les quantités  $H_1 + \dots + H_n$  et  $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$  ne dépendent pas de la façon dont elles sont parenthésées.

## Partie V : Groupes abéliens de rangs finis

Lorsque  $I$  est un ensemble quelconque,  $\mathbb{Z}^{(I)}$  désigne l'ensemble des familles  $(n_i)_{i \in I}$  d'entiers relatifs tels que  $\{i \in I / n_i \neq 0\}$  est fini.

Dans cette partie, on fixe un groupe abélien  $(G, +)$ .

Soit  $B = (x_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $G$ , où  $I$  est un ensemble quelconque.

On dit que  $B$  est une base de  $G$  si et seulement si pour tout  $x \in G$ , il existe une unique famille  $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^{(I)}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} n_i x_i$ .

**17°)** S'il existe une base de  $G$ , montrer que  $G$  est sans torsion.

On dit que  $G$  est de rang fini si et seulement si il possède une base de cardinal fini.

**18°)** Dans cette question, on suppose que  $G$  est de rang fini.

On note  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $G$  de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ .

**a)** Montrer que si  $(e_i)_{i \in I}$  est une autre base de  $G$ , alors  $I$  est de cardinal fini.

**b)** On note  $H = \{2x / x \in G\}$ .

Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  tel que  $G/H$  est de cardinal  $2^n$ .

En déduire que toutes les bases de  $G$  sont de cardinal  $n$ .

Ainsi, lorsque  $G$  est un groupe de rang fini, toutes ses bases ont le même cardinal, que l'on appelle le rang de  $G$ .

**19°)** Dans cette question, on suppose que  $G$  est un groupe sans torsion de type fini. Afin de montrer que  $G$  est de rang fini, on raisonne par l'absurde en supposant que  $G$  ne possède aucune base de cardinal fini.

a) Pour toute partie génératrice finie  $X$  de  $G$ , montrer qu'on peut définir

$$m_X = \min \left( \left\{ \sum_{x \in X} |n_x| / (n_x)_{x \in X} \in \mathbb{Z}^X \setminus \{0\} \text{ et } \sum_{x \in X} n_x x = 0 \right\} \right).$$

b) On note  $n$  le cardinal minimal des parties finies génératrices de  $G$ . Montrer que  $n$  est bien défini et qu'il existe une partie  $X_0$  génératrice de  $G$  de cardinal  $n$  telle que, pour toute autre partie génératrice  $X$  de cardinal  $n$ ,  $m_{X_0} \leq m_X$ .

Il existe alors une famille  $(n_x)_{x \in X_0} \in \mathbb{Z}^{X_0} \setminus \{0\}$  telle que  $m_{X_0} = \sum_{x \in X_0} |n_x|$  et  $\sum_{x \in X_0} n_x x = 0$ .

c) Montrer que, pour tout  $x \in X_0$ ,  $|n_x| \neq 1$ .

d) Montrer qu'il existe  $x, y \in X_0$  tels que  $0 < |n_x| < |n_y|$  et  $|n_x|$  ne divise pas  $|n_y|$ .

e) En effectuant la division euclidienne de  $|n_y|$  par  $|n_x|$ , construire une partie génératrice de  $G$  contredisant la minimalité de  $m_{X_0}$ .

**20°)** En déduire que  $G$  est un groupe sans torsion de type fini si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$  et que dans ce cas,  $n$  est unique.

## Partie VI : Théorème de structure des groupes de types finis

On fixe dans cette partie un groupe abélien  $(G, +)$  de type fini.

On note  $T(G)$  l'ensemble des éléments de  $G$  dont l'ordre est fini.

**21°)** Montrer que  $T(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

**22°)** Montrer que  $G/T(G)$  est un groupe sans torsion de type fini.

**23°)** Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}^*$  et  $d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$ , vérifiant que pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $d_{i+1} \mid d_i$ , tels que

$$G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}^k \times (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z}).$$