Développements limités :

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0, un $O(t^{n+1})$ est toujours un $o(t^n)$.

Tous les développements limités qui suivent sont au voisinage de 0.

$$
\begin{aligned}
e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + O(t^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + O(t^{n+1}) \\
\mathrm{ch} t &= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + O(t^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + O(t^{2n+2}) \\
\mathrm{sh} t &= t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(t^{2n+3}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(t^{2n+3}) \\
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + O(t^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + O(t^{2n+2}) \\
\sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(t^{2n+3}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(t^{2n+3})
\end{aligned}
$$

Pour tout **réel** m,

$$
\begin{aligned}
(1+t)^m &= 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2} t^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} t^n + O(t^{n+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} t^k + O(t^{n+1})
\end{aligned}
.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-t} &= 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots + t^n + O(t^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} t^k + O(t^{n+1}) \\
\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} + O(t^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} + O(t^{n+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{arctan} t &= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + O(t^{2n+3}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3}) \\
\tan t &= t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + O(t^7)
\end{aligned}
$$

Les formules suivantes sont hors programme.

$$\begin{aligned}\operatorname{argth}(t) &= t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + O(t^{2n+3}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(t) &= t + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + O(t^{2n+3}) \\ &= t + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}(t) &= t - \frac{t^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + O(t^{2n+3}) \\ &= t + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3})\end{aligned}$$