# MPSI 2
# Programme des colles de mathématiques.
## Semaine 13 : du lundi 13 janvier au vendredi 17.

## Liste des questions de cours

**1°)** Montrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

**2°)** Si $A$ une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, précisez les éléments de $\text{Vect}(A)$, en justifiant.

**3°)** Montrer que $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**4°)** Décrire les formes linéaires de $\mathbb{K}^n$.

**5°)** Si $u$ et $v$ sont deux endomorphismes qui commutent, montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par $v$.

**6°)** On considère l'équation suivante en l'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ ; $(E)\ :\ P(X+1) - P(X) = 2X + 1$. Montrer que $(E)$ est une équation linéaire puis la résoudre.

**7°)** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, montrer que $L(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

**8°)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in GL(E)$. Montrer que $w \longmapsto uwu^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $L(E)$.

**9°)** Enoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.

**10°)** $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = ?$ : énoncé et démonstration.

**11°)** Si $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de $E$ et $f = (f_i)_{i \in I} \in F^I$, montrer qu'il existe une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$ et donner une CNS portant sur $(f_i)$ pour que $u$ soit injective (resp : surjective).

**12°)** Soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $B$ une sous-algèbre de $A$ de dimension finie. Soit $b \in B$. Montrer que si $b$ est inversible dans $A$, alors $b^{-1} \in B$.

# Thèmes de la semaine

## 1 Groupes, anneaux et corps : En révisions

Il est conseillé de démarrer par un premier exercice portant sur ces chapitres.

## 2 Les espaces vectoriels

**Il s'agit du premier chapitre d'algèbre linéaire. On ne doit pas attendre une grande maîtrise du domaine de la part des élèves, la feuille de TD associée n'est pas terminée. De plus, les notions suivantes ne sont pas connues des élèves :**

— Les matrices ;

- rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, formule du rang ;
- théorie des systèmes linéaires (ils savent cependant résoudre des systèmes linéaires simples) ;
- projecteurs et symétries.
- Trace d'un endomorphisme ;
- hyperplans et dualité ;
- les déterminants ;
- la théorie de la réduction.

## 2.1 La structure algébrique d'espace vectoriel

**Notation.** $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

### 2.1.1 Définition et exemples

Vecteurs et scalaires.
Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $E^I$, sur-corps de $\mathbb{K}$, produit d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels.

### 2.1.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.$$

Droite vectorielle.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Alors $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ n'est pas modifié si l'on effectue l'une des *opérations élémentaires* suivantes :

- échanger $x_{i_0}$ et $x_{i_1}$, où $i_0, i_1 \in I$ avec $i_0 \neq i_1$ ;
- multiplier $x_{i_0}$ par $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$ ;
- ajouter à l'un des $x_i$ une combinaison linéaire des autres $x_j$.

Somme de $p$ sous-espaces vectoriels.

Somme directe de $p$ sous-espaces vectoriels (seulement la définition, aucun développement pour le moment).

### 2.1.3 Les applications linéaires

Morphisme, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

Dual de $E$ : $E^* = L(E, \mathbb{K})$.

Si $u$ est linéaire, $u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\Big) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.

Composée de deux applications linéaires.
Isomorphisme réciproque.

$L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Noyau et image d'une application linéaire.

Si $u$ et $v$ sont deux endomorphismes qui commutent, alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par $v$.

$uv = 0 \Longleftrightarrow Im(v) \subset Ker(u)$.

Équation linéaire $(E)$ : $f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$, où $f \in L(E, F)$ et $y \in F$.
Equation homogène associée : l'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(f)$.
$(E)$ est compatible si et seulement si $y \in \mathrm{Im}(f)$. Dans ce cas, la solution générale de $(E)$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière de $(E)$ la solution générale de $(H)$.

#### 2.1.4 Espaces affines

Si $A$ et $B$ sont deux points d'un $\mathbb{K}$-espace affine, $\overrightarrow{AB} = B - A$ est l'unique vecteur $x$ tel que $A + x = B$.
Relation de Chasles.
Définition d'un parallélogramme.

Si l'on fixe un point d'un espace affine $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ possède naturellement une srructure d'espace vectoriel.
Réciproquement, tout espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace affine.

#### 2.1.5 La structure d'algèbre

Algèbre commutative ou non commutative, intègre ou non intègre.
Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $(GL(E), \circ)$.

Sous-algèbres.

morphismes d'algèbres.

Automorphismes intérieurs.

Composition de morphismes d'algèbres, isomorphisme réciproque, images directe et réciproque d'une sous-algèbre.

### 2.2 Familles de vecteurs

**Notation.** $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

#### 2.2.1 Familles libres et génératrices

Familles libres, liées, génératrices, bases.
Coordonnées d'un vecteur dans une base.

#### 2.2.2 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition.** $E$ est de dimension finie si et seulement si il possède une famille génératrice finie.

**Lemme :** Toute famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $n + 1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

Théorème de la base incomplète.
Famille libre maximale.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
Si $\dim(E) = n$, $e$ est une base de $E$ si et seulement si $e$ est libre et de cardinal $n$, ou encore si et seulement si $e$ est génératrice et de cardinal $n$.

Si $F \subset G$, $\dim(F) \leq \dim(G)$, avec égalité si et seulement si $F = G$.

$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$.

#### 2.2.3 Exemples

Base canonique de $\mathbb{K}^{(I)}$.

Dans $\mathbb{K}^2$, deux vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul.

### 2.2.4 Application linéaire associée à une famille de vecteurs

Si $x = (x_i) \in E^I$, on note $\begin{array}{cccc} \Psi_x : & \mathbb{K}^{(I)} & \longrightarrow & E \\ & (\alpha_i)_{i\in I} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i x_i \end{array}$.

$x$ est une famille libre (resp : génératrice) si et seulement si $\Psi_x$ est injective (resp : surjective).
Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$, alors $E$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{(I)}$.

### 2.2.5 Image d'une famille par une application linéaire

**Notation.** Si $u \in L(E, F)$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in E^I$, on notera $(u(x_i))_{i\in I} = u(x)$. Alors $\Psi_{u(x)} = u \circ \Psi_x$.
Image d'une famille libre (resp : génératrice) par une injection (resp : surjection) linéaire.

Deux espaces de dimensions finies ont la même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.
$\dim(u(G)) \leq \dim(G)$, avec égalité lorsque $u$ est injective.

**Théorème.** Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$ et $f = (f_i)_{i\in I} \in F^I$, il existe une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$. CNS portant sur $(f_i)$ pour que $u$ soit injective (resp : surjective).

Soit $u \in L(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors $u$ injective $\Longleftrightarrow$ $u$ surjective $\Longleftrightarrow$ $u$ bijective.
Si $E$ admet une base $(e_i)_{i\in I}$, alors $L(E, F)$ est isomorphe à $F^I$.
$\dim(L(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

# Prévisions pour les semaines prochaines :

Pas de colles pour la semaine du lundi 20 janvier, semaine au ski.
Pour la semaine d'après : Normes et suites de vecteurs.