DM 28 : Orbites d'une bijection

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.

Partie I : Définition

Lorsque E est un ensemble, on note $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E.

1°) Montrer que $S(E)$, muni de la composition, est un groupe.

Lorsque f est une bijection d'un ensemble E dans lui-même, on dispose ainsi de la famille $(f^k)_{k\in\mathbb{Z}}$, définie selon la loi de composition de $S(E)$.
On note alors R_f la relation binaire définie sur E par :

$$\forall x, y \in E,\ \ [x\ R_f\ y \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ y = f^k(x))].$$

2°) Montrer que R_f est une relation d'équivalence sur E.

Les classes d'équivalence de R_f s'appellent les orbites de f.

3°) On suppose pour cette seule question que $E = \{1, 2, \dots, 8\}$ et que f est la bijection de E dans E définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 7$, $f(4) = 5$, $f(5) = 1$, $f(6) = 3$, $f(7) = 8$, $f(8) = 6$.
Déterminer les orbites de f.

4°) On suppose que E est un ensemble infini non dénombrable. Montrer que l'ensemble quotient E/R_f est également infini non dénombrable.

Si C est un ensemble fini, on convient de noter $|C|$ son cardinal.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de n ensembles finis. Démontrer la formule du crible :

$$|\bigcup_{k=1}^{n} F_k| = \sum_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i\in A} F_i|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ et $S_n = S(\mathbb{N}_n)$.

6°) Déterminer le nombre d'éléments de S_n dont toutes les orbites possèdent au moins 2 éléments. On notera d_n ce nombre d'éléments. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_n}{n!}$.

Partie II : Décomposition en produit de transpositions

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On note encore $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ et $S_n = S(\mathbb{N}_n)$.
Lorsque $a, b \in \mathbb{N}_n$ avec $a \neq b$, on note $(a\ b)$ la transposition qui échange a et b.
Lorsque $\sigma \in \mathcal{S}_n$, notons $O(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

7°) Si c est un cycle de S_n, calculer $O(c)$ en fonction de la longueur de c et de n.

8°) Si $\sigma \in S_n$, montrer qu'on peut décomposer σ en un produit de $n - O(\sigma)$ transpositions.

9°) Soit c et d deux cycles à supports disjoints.
Soit a un élément du support de c et b un élément du support de d.
a) En notant $c = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_k)$ et $d = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_h)$, montrer qu'on peut supposer que $a = x_1$ et $b = y_1$.
b) Calculer $c \circ d \circ (a\ b)$.
c) Calculer $O(c \circ d \circ (a\ b))$ en fonction de $O(c \circ d)$.

10°) Si c est un cycle et si a et b sont deux éléments distincts appartenant au support de c, montrer que $O(c \circ (a\ b)) = O(c) + 1$.

11°) Montrer que pour toute permutation σ de S_n et pour toute transposition τ de S_n, $O(\sigma \circ \tau) = O(\sigma) + \varepsilon$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

12°) En déduire que, pour tout $\sigma \in S_n$, si σ est égale au produit de k transpositions, c'est-à-dire si $\sigma = \prod_{i=1}^{k} \tau_i$, où $k \in \mathbb{N}$ et où les τ_i sont des transpositions, alors la parité de k ne dépend que de σ.
Quelle notion classique associée à σ ce résultat permet-il de définir ?

13°) Montrer que toute décomposition d'un élément σ de $\mathcal{S}_n$ en un produit de transpositions fait intervenir au moins $n - O(\sigma)$ transpositions.

Partie III : Décomposition en produit d'involutions

On rappelle que g est une involution d'un ensemble E dans lui-même si et seulement si g est une application de E dans E telle que $g \circ g = Id_E$.
Si f est une bijection d'un ensemble E dans lui-même, on note P_f la condition suivante : il existe deux involutions g et h de E dans E telles que $f = g \circ h$.

14°) Soit f une bijection d'un ensemble E dans lui-même.
Soit O une orbite de f. Montrer qu'on peut définir $f|_O^O$ et que c'est une bijection.
Montrer que si $P_{f|_O^O}$ est vraie pour toute orbite O de f, alors P_f est également vraie.

15°) Soit f une bijection d'un ensemble E dans lui-même.
Soit O une orbite de f que l'on suppose infinie.
Montrer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{Z}$ dans O telle que $\varphi^{-1} \circ f|_O^O \circ \varphi$ est égale à l'application $n \longmapsto n + 1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

En déduire que $P_{f|_O}$ est vraie.

16°) En remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est bien choisi, lorsque l'orbite est finie, en déduire P_f pour toute bijection f d'un ensemble E dans lui-même.