DM 30 : Produit tensoriel

$\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

Partie I : applications bilinéaires

Lorsque E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, si b est une application de $E \times F$ dans G, on dit que b est bilinéaire si et seulement si , pour tout $x, y \in E$, pour tout $z, t \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z)$ et $b(x, \alpha z + t) = \alpha b(x, z) + b(x, t)$.

1°) Montrer que $(x, y) \longmapsto xy$ est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Plus généralement, si A est une $\mathbb{K}$-algèbre, montrer que $(x, y) \longmapsto xy$ est une application bilinéaire de A^2 dans A.

2°) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ et F l'espace vectoriel des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $(f, g) \in E \times F$, on pose $b(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)(g(t) + 2g'(t))\, dt$. Montrer que b est bilinéaire.

3°) Lorsque E, F et G sont 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, montrer que l'ensemble noté $B(E, F; G)$ des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4°) Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
On suppose que E, F et G sont 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que $B(E, F; G)$ est isomorphe à $L(E, L(F, G))$.

Partie II : unicité du produit tensoriel

Dans cette partie, on fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels notés E et F.
Soit P un troisième $\mathbb{K}$-espace vectoriel et
u une application bilinéaire de $E \times F$ dans P.

5°) Lorsque G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, montrer que l'application $\ell \longmapsto \ell \circ u$ est une application linéaire de $L(P, G)$ dans $B(E, F; G)$.

Lorsque, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel G, l'application $\ell \longmapsto \ell \circ u$ est un isomorphisme de $L(P, G)$ dans $B(E, F; G)$, on dit que P, muni de u, est un produit tensoriel de E par F.

6°) Soit P' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u' \in B(E, F; P')$.

On suppose que P muni de u est un produit tensoriel de E par F.
Montrer que P' muni de u' est aussi un produit tensoriel de E par F si et seulement si il existe un isomorphisme h de P dans P' tel que $u' = h \circ u$.

On peut donc dire que, si le produit tensoriel de E par F existe, alors il est unique à un isomorphisme près.
Ainsi, lorsque P muni de u est un produit tensoriel de E par F, on dira que P est **le** produit tensoriel de E par F, et on le notera $E \otimes F$. De plus, pour tout $(x, y) \in E \times F$, on notera $x \otimes y = u(x, y)$.
Alors, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel G et pour toute application bilinéaire b de $E \times F$ dans G, il existe une unique application linéaire b' de $E \otimes F$ dans G telle que, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $b(x, y) = b'(x \otimes y)$. On convient d'identifier b et b', de sorte que toute application bilinéaire b de $E \times F$ dans G peut être vue comme une application linéaire de $E \otimes F$ dans G.
De plus, tout autre produit tensoriel de E par F se déduit de $E \otimes F$ par un isomorphisme h de $E \otimes F$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel P' : alors P' est un produit tensoriel de E par F muni de $u' = h \circ u$. Si l'on note $P' = E \otimes' F$, et pour tout $(x, y) \in E \times F$, $u'(x, y) = x \otimes' y$, alors : pour tout $(x, y) \in E \times F$, $x \otimes' y = h(x \otimes y)$.

Partie III : quotient d'espaces vectoriels

Dans cette partie, on fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de E.
Pour tout $x, y \in E$, on convient que $x \ R \ y$ si et seulement si $x - y \in F$.

7°) Montrer que R est une relation d'équivalence.

Lorsque $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x pour cette relation d'équivalence.
De plus l'ensemble quotient E/R est noté E/F : c'est le quotient de l'espace vectoriel E par l'espace vectoriel F.
On définit sur E/F une addition et une multiplication par des scalaires en convenant que, pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$ et $\alpha.\overline{x} = \overline{\alpha x}$.

8°) Montrer que ces égalités structurent E/F en un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

9°) On suppose que G est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus G = E$, c'est-à-dire tel que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.
Montrer que E/F est isomorphe à G.

10°) Pour cette seule question, $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \right\}$.

On note G la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer $E = F \oplus G$ puis que E/F est une droite vectorielle.

Partie IV : existence du produit tensoriel

Dans cette partie, on fixe à nouveau deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels notés E et F.
Lorsque I est un ensemble quelconque et que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, on dit que cette famille est presque nulle si et seulement si $\{i \in I \ / \ x_i \neq 0\}$ est fini.
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$.

11°) Montrer que $\mathbb{K}^{(I)}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour tout $i, j \in I$, on pose $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$.
Pour tout $i \in I$, on note $c_i = (\delta_{i,j})_{j\in I}$.

12°) Montrer que la famille $(c_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathbb{K}^{(I)}$.
On dit que $(c_i)_{i\in I}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{(I)}$.

On note $Q = \mathbb{K}^{(E\times F)}$ et $(c_{e,f})_{(e,f)\in E\times F}$ la base canonique de Q.
On note également $A_1 = \{c_{\alpha e+e',f} - \alpha c_{e,f} - c_{e',f} \ / \ \alpha \in \mathbb{K},\ e, e' \in E,\ f \in F\}$
et $A_2 = \{c_{e,\alpha f+f'} - \alpha c_{e,f} - c_{e,f'} \ / \ \alpha \in \mathbb{K},\ e \in E,\ f, f' \in F\}$.
Enfin, on note S le sous-espace vectoriel de Q engendré par $A_1 \cup A_2$ et $P = Q/S$.

13°) Montrer que $(e, f) \longmapsto \overline{c_{e,f}}$ est une application bilinéaire de $E \times F$ dans P, que l'on notera u.

14°) Montrer que P muni de u est un produit tensoriel de E par F.

Partie V : Newton $\Longleftrightarrow$ Leibniz

15°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Calculer la dérivée n-ième de $t \longmapsto e^{at}$.
À partir de la formule de Leibniz, relative à la dérivée n-ième du produit de deux fonctions, retrouver la formule du binôme de Newton relative au développement de $(a + b)^n$.

Réciproquement, nous souhaitons retrouver la formule de Leibniz à partir de la formule du binôme de Newton.
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de prouver que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

16°) Montrer qu'il existe un unique triplet (d_1, d_2, p) tels que d_1 et d_2 sont des endomorphismes de $E\otimes E$ et $p \in L(E\otimes E, E)$ et tels que, pour tout $f, g \in E$, $d_1(f\otimes g) = f'\otimes g$, $d_2(f \otimes g) = f \otimes g'$ et $p(f \otimes g) = fg$.

On note d l'application de E dans E définie par $d(f) = f'$.

17°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^n p = p(d_1 + d_2)^n$, où le produit utilisé est la composition.

18°) Conclure.