

Feuille d'exercices 14.

Séries de réels ou de complexes

Séries de réels positifs

Exercice 14.1 : (niveau 1)

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 14.2 : (niveau 1)

Nature de la série $\sum \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$.

Exercice 14.3 : (niveau 1)

Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ est aussi convergente.

Exercice 14.4 : (niveau 1)

Nature de $\sum u_n$ où $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{-u_n}$.

Exercice 14.5 : (niveau 1)

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature de $\sum \sqrt{u_{2n} u_n}$.

Exercice 14.6 : (niveau 1)

Grâce à une comparaison entre série et intégrale, déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^n \ln k$.

En déduire, la nature de la série de terme général $u_n = \left(\sum_{k=2}^n \ln k\right)^{-1}$.

Exercice 14.7 : (niveau 1)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ où $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Exercice 14.8 : (niveau 1)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ 3 séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries $\sum \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$ et $\sum \sqrt{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n}$ sont convergentes.

Exercice 14.9 : (niveau 1)

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0, 1[$ telle que $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i)$.

Montrer que $(p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) \iff (\sum \varepsilon_n \text{ diverge})$.

Exercice 14.10 : (niveau 2)

Nature de $\sum_{n \geq 1} a_n$ où $a_n = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^{-n}$.

Exercice 14.11 : (niveau 2)

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 14.12 : (niveau 2)**Règle de Cauchy.**

1°) Soit $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ telle que $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- ◇ Si $l < 1$, montrer que $\sum a_n$ est absolument convergente.
- ◇ Si $l > 1$ ou si $l = 1^+$, montrer que $\sum a_n$ diverge grossièrement.
- ◇ Lorsque $l = 1$, montrer qu'on ne peut pas conclure.

2°) En déduire la nature des séries $\sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ et $\sum \frac{n^{\ln n}}{\ln^n n}$.

Exercice 14.13 : (niveau 2)

α désigne un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{(n\alpha)^n}{n} \sum_{k=0}^n (k!)$. Déterminer

la nature de la série $\sum a_n$.

Exercice 14.14 : (niveau 2)

Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum a_n$ converge.

Montrer que $na_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 14.15 : (niveau 2)

Soit (u_n) une suite réelle décroissante qui tend vers 0.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont la même nature.

En déduire la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, où $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.16 : (niveau 2)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \prod_{k=1}^n (2 - e^{\frac{1}{k}})$.

Exercice 14.17 : (niveau 2)

Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 14.18 : (niveau 3)

Soit (u_n) une suite décroissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $ku_{kn} \geq u_n$. Montrez que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 14.19 : (niveau 3)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de complexes telle que $\sum \frac{a_n}{n}$ est absolument convergente.

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^k} = 0$.

Que peut-on dire de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$?

Exercice 14.20 : (niveau 3)

Règle de Duhamel

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1°) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si $\alpha > 1$, montrer que $\sum a_n$ converge et si $\alpha < 1$, montrer que $\sum a_n$ diverge.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum a_n$, où

$$a_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}.$$

Exercice 14.21 : (niveau 3)

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application injective. Montrer que la série $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 14.22 : (niveau 3)

Soit φ une application injective de \mathbb{N}^* dans lui-même.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = PPCM(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$.

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.

Séries alternées

Exercice 14.23 : (niveau 1)

Déterminer les natures des séries $\sum (-1)^n \frac{2^n}{3\sqrt{n}}$ et $\sum (-1)^n \frac{2^{\ln n}}{3\sqrt{n}}$.

Exercice 14.24 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$, où $a_n = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{t}}{n+t} dt$.

Exercice 14.25 : (niveau 2)

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 14.26 : (niveau 2)

Nature de la série $\sum a_n$, où $a_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

Exercice 14.27 : (niveau 2)

On considère une suite récurrente telle que $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \cos u_n$.

Etudier la suite (u_n) , puis les séries de terme général $(-1)^n u_n$ et $\ln(\cos u_n)$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 14.28 : (niveau 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln n$.

1°) Trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ puis en déduire la convergence de la suite (u_n) . On notera γ la limite de la suite (u_n) .

3°) Montrer que $h_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

4°) Montrer qu'il existe α et β tels que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \alpha h_{2n} + \beta h_n$.

5°) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On note (w_k) la suite définie par : $w_k = \frac{\sigma}{k}$ lorsque 4 divise k et $w_k = \frac{1}{k}$

sinon. De plus, on note $S_n = \sum_{k=1}^n w_k$.

6°) Montrer que (S_{4n}) converge si et seulement si $\sigma = -3$.

7°) Etudier la nature et calculer la somme de la série $\sum w_k$.

Exercice 14.29 : (niveau 3)

1°) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+1+k}$.

2°) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = (-1)^n u_n$.

Exercice 14.30 : (niveau 3)

Sommation par paquets.

Soient $\sum x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On pose $y_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} x_k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k$.

Ainsi, y_n constitue un “paquet” de $\varphi(n) - \varphi(n - 1)$ termes consécutifs de $\sum x_k$, en convenant que $\varphi(-1) = -1$.

1°) Montrer que si $\sum x_n$ converge, alors $\sum y_n$ converge également.
Montrer que la réciproque est fautive.

2°) Montrer que la réciproque est vraie lorsque $\sum x_k$ est à termes positifs.

3°) Montrer que la réciproque est vraie lorsque (x_n) tend vers 0 et que la suite $(\varphi(n) - \varphi(n - 1))$ est majorée.

4°) Montrer que la réciproque est vraie lorsqu’à l’intérieur de chaque paquet (pour $k \in [\varphi(n - 1) + 1, \varphi(n)]$), tous les x_k sont réels et de même signe.

Exercices supplémentaires

Exercice 14.31 : (niveau 1)

Soit α un réel. Déterminer la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{(n^\alpha)}$.

Exercice 14.32 : (niveau 1)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $a_n = \operatorname{ch}^\alpha(n) - \operatorname{sh}^\alpha(n)$. Nature de $\sum a_n$.

Exercice 14.33 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série $\sum \ln(n) \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 14.34 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$, où $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{n + \operatorname{Arctant} t}$.

Exercice 14.35 : (niveau 1)

Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n} = \frac{4 - 2 \cos \alpha}{5 - 4 \cos \alpha}$.

Exercice 14.36 : (niveau 2)

Soit (a_n) une suite de réels positifs. Montrez que si $\sum n^2 a_n^2$ converge, $\sum a_n$ est convergente.

Exercice 14.37 : (niveau 2)

Trouver la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$, à l'aide des suites $x_n = \pi(2 + \sqrt{3})^n$ et $y_n = \pi(2 - \sqrt{3})^n$.

Exercice 14.38 : (niveau 2)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum a_n$ où $a_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$.

Exercice 14.39 : (niveau 2)

Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum \int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e} dx$ sont toutes convergentes ou bien toutes divergentes.

Exercice 14.40 : (niveau 2)

Déterminer la nature de $\sum a_n$ où $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + n^2 \tan^2(x)}$.

Exercice 14.41 : (niveau 2)

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n . Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} (10 - n^{\frac{1}{p(n)}})$.

Exercice 14.42 : (niveau 2)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

On pose $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n})$.

1°) On suppose que $\sum u_n$ est convergente : Nature de $\sum v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$, convergence de $(v_{n+1}(v_{n+1} - v_n))$, de $(v_{n+1} - v_n)$, puis de (v_n) .

2°) On suppose que (v_n) converge dans \mathbb{R} : Convergence de $\sum (v_{n+1}^2 - v_n^2)$, puis de $\sum u_n$.

Exercice 14.43 : (niveau 2)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 14.44 : (niveau 2)

Soit f une application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_+ que l'on suppose croissante et continue.

Montrer que l'intégrabilité de $t \mapsto f(e^{-t})$ sur \mathbb{R}_+ est équivalente à la convergence de la série de terme général :

1°) $u_n = f(e^{-n})$.

2°) $v_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3°) $w_n = n f(e^{-n^2})$.

Exercice 14.45 : (niveau 2)

1°) Notons $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin(\ln x)}{x}$. Montrer que f' est intégrable.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} w_n$ est absolument convergente.

3°) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

4°) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 14.46 : (niveau 2)

1°) En utilisant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 x^{2k} dx$, calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

2°) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(\tan \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)$ (on pourra faire intervenir les restes de Cauchy R_n de la série de la première question).

Exercice 14.47 : (niveau 3)

(u_n) désigne une suite de réels positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$.

1°) On suppose que $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuter de la convergence de la série des w_n en fonction de α .

2°) On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes.

Montrer que $\sum \sqrt{u_n w_n}$ est divergente.

3°) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum w_n$ diverge.

Exercice 14.48 : (niveau 3)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1°) Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} a_n$ où $a_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{n^\alpha}$.

2°) Soit β un second réel.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(\beta k)$.

Calculer C_n . La suite (C_n) est-elle bornée?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\beta)}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n C_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) - C_0 + \frac{C_n}{(n+1)^\alpha}.$$

c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ où $a_n = \frac{\cos(\beta n)}{n^\alpha}$?

Exercice 14.49 : (niveau 3)

a et b sont deux réels strictement positifs.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum u_n$ et de calculer sa somme en cas de convergence.

1°) Traitez le cas où $a \geq b$.

2°) On suppose que $a - b + 1 < 0$.

- Etudiez le sens de variation de la suite $((n+b-1)u_n)$.
- Traitez l'exercice dans ce cas.

3°) Achevez la résolution de l'exercice.

Exercice 14.50 : (niveau 3)

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Soit (u_k) une suite p -périodique de complexes.

Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{u_k}{k}$ est convergente si et seulement si $\sum_{k=1}^p u_k = 0$.

Exercice 14.51 : (niveau 3)

Soit f une application de \mathbb{R}_+^* dans lui-même telle que $\frac{f'(t)}{f(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$.

Montrer que la série $\sum f(n)$ est convergente.

Exercice 14.52 : (niveau 3)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_0 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum \frac{u_n}{s_n^\alpha}$.

Exercice 14.53 : (niveau 3)

Soit (u_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont la même nature.

Lorsqu'elles sont définies, comparer les sommes de ces deux séries.

Exercice 14.54 : (niveau 3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f(n)$ le nombre de "1" dans l'écriture binaire de n .

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.