Résumé de cours :
Semaine 16, du 13 au 17 janvier.

Suites de vecteurs (suite et fin)

1 Somme et produit de limites (fin)

Propriété. L'ensemble des suites convergentes de E noté $E_{cv}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $l^{\infty}(E)$ et l'application $\begin{array}{ccc} E_{cv}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & E \\ (x_n) & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \end{array}$ est une application linéaire.

Propriété. **Suites à valeurs dans un produit.**
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, …, E_p p espaces vectoriels normés, leurs normes étant notées N_1, …, N_p. On note $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ que l'on munit de l'une des trois normes classiques.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{1,n}, \ldots, x_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $l = (l_1, \ldots, l_p) \in E$.
Alors (x_n) converge vers l si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $(x_{i,n})$ converge vers l_i.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. **Suites à valeurs dans un espace de dimension finie.**
On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $e = (e_1, \ldots, e_q)$ est une base.
Soit (x_n) une suite de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \sum_{i=1}^{q} x_{i,n} e_i$.
Alors, la suite (x_n) converge dans E si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, la suite $(x_{i,n})$ converge dans $\mathbb{K}$, et, dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sum_{i=1}^{q} (\lim\limits_{n\to+\infty} x_{i,n}) e_i$.

2 Suites de complexes

2.1 Premières propriétés

Propriété. Soit $(x_n) \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors $\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit (z_n) une suite de complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.
Alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.
Dans ce cas, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

2.2 Suites arithmético-géométriques

Propriété. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, on calcule $c \in \mathbb{C}$ tel que $c = ac + b$. Alors $u_n - c$ est géométrique.

Il faut savoir le démontrer.

2.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Propriété. Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
$\chi(X) = X^2 - aX - b$ est le polynôme caractéristique de (u_n). On note $\Delta = a^2 + 4b$.

- Si $\Delta \neq 0$, en notant λ_1 et λ_2 les deux racines de χ, $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$.
- Si de plus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, en posant $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$,
  $\exists (D_1, D_2) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n = \rho^n (D_1 \cos(n\theta) + D_2 \sin(n\theta))$.
- Si $\Delta = 0$, en notant λ la racine double, $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n = \lambda^n (C_1 + nC_2)$.

Il faut savoir le démontrer.

3 Suites de complexes (fin)

3.1 Suites homographiques (hors programme)

Propriété. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$, on résout l'équation $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$.
Si cette équation possède deux solutions α et β distinctes, alors $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ est géométrique.
Sinon, cette équation possède une unique solution α et $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est arithmétique.

4 Suites de réels

4.1 Limites infinies

Définition. $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \iff \forall M \geq 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geq N, \ \ x_n \geq M$.
$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \iff \forall M \geq 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geq N, \ \ x_n \leq -M$.

Définition. Lorsqu'une suite de réels tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, elle est toujours divergente : on dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. On distingue ainsi trois catégories de suites réelles :

- Les suites convergentes. Ce sont celles qui convergent vers un réel.
- Les suites divergentes de première espèce. Ce sont celles qui divergent vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Toutes les autres suites. On dit qu'elles sont divergentes de seconde espèce.

Propriété. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition. Si (x_n) est dans un espace métrique , $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty \iff d(x_0, x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Propriété. Composition des limites : Si (x_n) est dans un espace métrique et si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, avec ℓ éventuellement infinie, pour tout $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Dans un espace métrique , $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $x_{pn+i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Remarque. C'est encore vrai dans le cas de limites infinies.

Propriété. Avec des suites de réels, en prenant $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$,

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \mathbb{R}$, alors $x_n + y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, alors $x_n + y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, mais $x_n - y_n$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, alors $-x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\varepsilon\infty$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$, alors $x_n y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, sauf lorsque $\ell = 0$, qui est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon'\infty$, alors $x_n y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\varepsilon'\infty$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$ alors $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ alors $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. Lorsque u_n est de la forme $u_n = a_n^{b_n}$, il est indispensable d'écrire $u_n = e^{b_n \ln a_n}$ pour étudier sa limite. Par exemple, $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

4.2 limites et relation d'ordre

Principe des gendarmes : Soit $(p_n), (g_n), (g'_n)$ trois suites de **réels** et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \le p_n \le g'_n$, $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $g'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Alors $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Le principe des gendarmes s'adapte aux cas des limites infinies :
Lemme du tunnel : Soit (u_n) une suite de réels qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < \ell < b$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$, $a < u_n < b$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Dans $\mathbb{R}$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \le b_n$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Propriété. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(X) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).
Il faut savoir le démontrer.

4.3 Suites monotones

Théorème de la limite monotone : Soit (x_n) une suite croissante de réels.
Si (x_n) est majorée, alors cette suite est convergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Si (x_n) n'est pas majorée, alors cette suite est divergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
Ainsi, dans tous les cas, on peut écrire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Soit (x_n) une suite décroissante de réels.
Si (x_n) est minorée, alors cette suite est convergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Si (x_n) n'est pas minorée, alors cette suite est divergente. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.
Ainsi, dans tous les cas, on peut écrire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Propriété. Soit (x_n) une suite géométrique de réels de raison a, tel que $x_0 \neq 0$.
- Si $|a| < 1$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $a = 1$, x_n est constante.
- Si $a > 1$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon\infty$, où ε est le signe de x_0
- Si $a \leq -1$, (x_n) diverge.

4.4 Suites adjacentes

Définition. Deux suites (x_n) et (y_n) de réels sont adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème. Si (x_n) et (y_n) sont adjacentes avec (x_n) est croissante, alors ces deux suites convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $x_p \leq \ell \leq y_q$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème des segments emboîtés : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, décroissante au sens de l'inclusion, dont les longueurs tendent vers 0. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Il faut savoir le démontrer.

5 Valeurs d'adhérences

On se place dans un espace métrique quelconque.

Définition. Les suites extraites de (x_n) sont les $(x_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Propriété. Si une suite (x_n) converge vers ℓ, toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.

Remarque. Cette propriété se généralise au cas des limites infinies.

Propriété. Une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est une suite extraite de (x_n).
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Les valeurs d'adhérence de (x_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (x_n).

Remarque. La limite d'une suite convergente est son unique valeur d'adhérence.
Si une suite admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, elle est divergente.

Propriété. (hors programme). Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) a est une valeur d'adhérence de (x_n).
ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ d(x_n, a) < \varepsilon$.
iii) $\forall \varepsilon > 0 \ Card(\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a, \varepsilon)\}) = +\infty$.
Il faut savoir le démontrer.

Lemme des pics : De toute suite de réels on peut extraire une suite monotone.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème de Bolzano-Weierstrass :
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.
Il faut savoir le démontrer pour les suites bornées de complexes.