DM 31 : Un corrigé

Partie I : Projecteurs

1°) $\diamond$ Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Alors $x = p(x) + q(x)$ et $y = p(y) + q(y)$, donc $\alpha x + y = (\alpha p(x) + p(y)) + (\alpha q(x) + q(y))$ et $(\alpha p(x) + p(y), \alpha q(x) + q(y)) \in F \times G$. D'autre part, $\alpha x + y = p(\alpha x + y) + q(\alpha x + y)$ avec $(p(\alpha x + y), q(\alpha x + y)) \in F \times G$, donc d'après l'unicité de la décomposition d'un vecteur selon $F \oplus G$ (cf la dernière condition caractérisant le fait que F et G sont supplémentaires dans E), $p(\alpha x + y) = \alpha p(x) + p(y)$ et $q(\alpha x + y) = \alpha q(x) + q(y)$.
On a montré que $p, q \in L(E)$.
$\diamond$ Soit $x \in E$. $p(x) \in F$, donc $p(x) = p(x) + 0$ et $p(x) = p(p(x)) + q(p(x))$, avec $(p(x), 0) \in F \times G$ et $(p(p(x)), q(p(x))) \in F \times G$. Ainsi, toujours d'après l'unicité de la décomposition de $p(x)$ selon $F \oplus G$, on en déduit que $p(p(x)) = p(x)$ et que $q(p(x)) = 0$, pour tout $x \in E$. Ceci prouve que $p^2 = p$ et $qp = 0$.
De même, on montre que $q^2 = q$ et $pq = 0$.
$\diamond$ Par définition de p et q, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + q(x)$, donc $p + q = Id_E$.

2°) Soit $p \in L(E)$ tel que $p^2 = p$. Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
$\diamond$ Soit $x \in E$ tel que $p(x) = x$. Alors $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p) = F$.
Réciproquement, si $x \in F = \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$,
donc $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ car p est un projecteur.
Ainsi $x \in F \iff p(x) = x \iff (Id_E - p)(x) = 0$ et $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.
$\diamond$ Soit $x \in E$. $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$, car p est un projecteur,
donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. De plus $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G}$.
Ceci démontre que $E = F + G$.
$\diamond$ Soit $x \in F \cap G$. Alors $p(x) = x$ et $p(x) = 0$, donc $x = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
On a montré que $E = F \oplus G$, d'après la seconde caractérisation donnée par l'énoncé.
$\diamond$ On peut donc considérer le projecteur u sur F parallèlement à G.
Soit $x \in E$. On a vu que $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$, donc $u(x) = p(x)$. Ainsi, $p = u$ est bien le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

3°)

— Pour tout $x \in E$, $Id_E^2(x) = x$ donc $Id_E^2 = Id_E$. Ainsi, d'après la question précédente, Id_E est le projecteur sur $\mathrm{Im}(Id_E) = Id_E(E) = E$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(Id_E) = \{0\}$.

— De même, pour tout $x \in E$, $0^2(x) = 0 = 0(x)$ donc $0^2 = 0$, donc 0 est le projecteur sur $\mathrm{Im}(0) = \{0\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(0) = E$.

— Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, $p \circ p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $p^2 = p$, ce qui prouve que p est un projecteur. De plus, $\mathrm{Im}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ x = 0 \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, p_1 est le projecteur sur $\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallèlement à $\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4°) D'après le cours, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, on vérifie facilement que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont non vides et stables par combinaison linéaire, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. De plus, si $f \in E$, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, on vérifie que $f = g + h$, $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$. Ainsi d'après l'énoncé, on a montré que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
On peut donc définir le projecteur p sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$, et ce qui précède montre que, pour tout $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $p(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Partie II : Trace d'un endomorphisme

5°) $\diamond$ Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Commençons par montrer que e_i^* est bien une forme linéaire (elle est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$). Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\alpha x + y = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x_j + y_j) e_j$,
donc $e_i^*(\alpha x + y) = \alpha x_i + y_i = \alpha e_i^*(x) + e_i^*(y)$, ce qui prouve que e_i^* est bien linéaire.
$\diamond$ Ainsi, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une famille de n vecteurs de E^*.
D'après le cours, $\dim(L(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E) = n$, donc pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre : soit $(\alpha_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(x) = 0$. C'est en particulier vrai pour e_j, où $j \in \mathbb{N}_n$. Or $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ (c'est la i-ème coordonnée de e_j dans la base e), donc $0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j$. Ceci prouve que la famille est bien libre, ce qui conclut.

6°) $\diamond$ Soit $u \in L(E, F)$. Pour tout $x \in E$,
$u(x) = u\Big(\sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) \sum_{j=1}^{p} f_j^*(u(e_k)) f_j$, donc

$u(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) f_j^*(u(e_k)) f_j = \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq j\leq p}} f_j^*(u(e_k)) g_{k,j}(x)$. Ainsi $u = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq j\leq p}} f_j^*(u(e_k)) g_{k,j}$.

$\diamond$ Les e_i^* étant linéaires, on vérifie aisément que les $g_{i,j}$ sont linéaires. Ainsi, ce qui précède prouve que la famille $(g_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est génératrice de $L(E,F)$. De plus son cardinal est égal à $np = \dim(L(E,F))$, donc c'est une base de $L(E,F)$.

7°) Soit $u, v \in L(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. D'après la linéarité des e_i^*, on a
$\mathrm{Tr}_e(\alpha u+v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^*(\alpha u(e_i)+v(e_i)) = \alpha\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u(e_i))+\sum_{i=1}^{n} e_i^*(v(e_i)) = \alpha\mathrm{Tr}_e(u)+\mathrm{Tr}_e(v)$.
De plus Tr_e est une application de $L(E)$ dans $\mathbb{K}$, donc c'est bien une forme linéaire sur $L(E)$.

8°) $\diamond$ $\mathrm{Tr}_e(uv) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u(v(e_i)))$, or pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $v(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} e_j^*(v(e_i))e_j$, donc par linéarité de u et des e_i^*, on obtient que (1) : $\mathrm{Tr}_e(uv) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_j^*(v(e_i))e_i^*(u(e_j))$.

$\diamond$ En utilisant le changement de variable $(i,j) \longmapsto (j,i)$ qui est bien bijectif de $\mathbb{N}_n^2$ dans lui-même, on en déduit que $\mathrm{Tr}_e(uv) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^*(v(e_j))e_j^*(u(e_i))$, puis en intervertissant les deux sommes, $\mathrm{Tr}_e(uv) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_j^*(u(e_i))e_i^*(v(e_j))$. Or si l'on applique la relation (1) en remplaçant (u,v) par (v,u), on obtient que $\mathrm{Tr}_e(vu) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_j^*(u(e_i))e_i^*(v(e_j))$, donc on a montré que $\mathrm{Tr}_e(uv) = \mathrm{Tr}_e(vu)$.

9°) $\diamond$ v transforme la base e en la base f, donc d'après le cours, v est un automorphisme de E. En particulier, v^{-1} est bien défini et pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $v^{-1}(f_i) = e_i$. Ainsi,
$\mathrm{Tr}_f(vuv^{-1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i^*(vuv^{-1}(f_i)) = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(vu(e_i))$, or pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,
$u(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} e_j^*(u(e_i))e_j$, donc par linéarité de v et des f_i^*,
$\mathrm{Tr}_f(vuv^{-1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_j^*(u(e_i))f_i^*(v(e_j))$, or pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$,
$f_i^*(v(e_j)) = f_i^*(f_j) = \delta_{i,j}$, donc $\mathrm{Tr}_f(vuv^{-1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u(e_i)) = \mathrm{Tr}_e(u)$, ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ D'après la question 8, appliquée avec la base f, et en remplaçant le couple (u,v) par (v, uv^{-1}), $\mathrm{Tr}_f(v(uv^{-1})) = \mathrm{Tr}_f((uv^{-1})v) = \mathrm{Tr}_f(u)$, donc d'après le point précédent, $\mathrm{Tr}_f(u) = \mathrm{Tr}_e(u)$.

10°) $\diamond$ Notons $a = \dim(F)$. D'après le cours, F possède au moins une base, de cardinal a, que l'on notera $(e_1, \ldots, e_a)$. De même, G possède au moins une base, notée $(e_{a+1}, \ldots, e_n)$. Posons $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et montrons que e est une base de E.

$\diamond$ Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$. Posons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{a} \alpha_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=a+1}^{n} \alpha_i e_i$. Alors $x + y = 0$, donc $x = -y \in F \cap G = \{0\}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{a} \alpha_i e_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=a+1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, or les familles $(e_1, \ldots, e_a)$ et $(e_{a+1}, \ldots, e_n)$ sont libres, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_i = 0$. Ceci prouve que e est libre.

$\diamond$ Soit $z \in E$. Alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x + y$. Or $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_a)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{a+1}, \ldots, e_n)$, donc il existe $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{a} \alpha_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=a+1}^{n} \alpha_i e_i$. Alors $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Ceci prouve que e est génératrice de E. C'est donc bien une base de E.

$\diamond$ Ainsi, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}_e(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^*(p(e_i))$. Or, lorsque $i \in \mathbb{N}_a$, $e_i \in F = \mathrm{Im}(p)$, donc d'après la question 2, $p(e_i) = e_i$, puis $e_i^*(p(e_i)) = 1$ et lorsque $i \in \{a+1, \ldots, n\}$, $e_i \in G = \mathrm{Ker}(p)$, donc $p(e_i) = 0$, puis $e_i^*(p(e_i)) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Tr}(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{a} 1 = a = \dim(F)$.

11°) Reprenons les notations de la question 6. On a vu que $g = (g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $L(E, F)$ et que pour tout $u \in L(E, F)$, $u = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*(u(e_k)) g_{k,j}$, donc si l'on note $(g_{i,j}^*)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la base duale de g, on voit que, pour tout $u \in L(E, F)$ et $k, j \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$, $g_{k,j}^*(u) = f_j^*(u(e_k))$.

Ainsi, $\mathrm{Tr}(\Psi) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} g_{k,j}^*(\Psi(g_{k,j})) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} g_{k,j}^*(v g_{k,j} u) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*[v g_{k,j} u(e_k)]$, puis

$\mathrm{Tr}(\Psi) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*[v(e_k^*(u(e_k)) f_j)] = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} e_k^*(u(e_k)) \times f_j^*[v(f_j)]$. Ainsi,

$\mathrm{Tr}(\Psi) = \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k^*(u(e_k)) \Big) \times \Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j^*(v(f_j)) \Big) = \mathrm{Tr}(u) \times \mathrm{Tr}(v)$.

Partie III : Formule de Burnside

12°) $\diamond$ Supposons que (E, ρ) est une représentation linéaire de Γ.
Soit $x, y \in E$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\rho(\gamma)$ est linéaire, donc $\gamma.(x+y) = \rho(\gamma)(x+y) = \rho(\gamma)(x) + \rho(\gamma)(y) = \gamma.x + \gamma.y$, et $\gamma.(\lambda x) = \rho(\gamma)(\lambda x) = \lambda \rho(\gamma)(x) = \lambda(\gamma.x)$.
De plus, ρ est un morphisme de groupes, donc $\rho(1_\Gamma) = Id_E$ et $\rho(\gamma\gamma') = \rho(\gamma)\rho(\gamma')$.
On en déduit que $1_\Gamma.x = \rho(1_\Gamma)(x) = Id_E(x) = x$
et $\gamma.(\gamma'.x) = \rho(\gamma)[\rho(\gamma')(x)] = \rho(\gamma\gamma')(x) = (\gamma\gamma').x$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que pour tout $x, y \in E$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$\gamma.(x+y) = \gamma.x + \gamma.y, \quad \gamma.(\lambda x) = \lambda(\gamma.x), \quad 1_\Gamma(x) = x$ et $\gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x$.
Les deux premières propriétés assurent que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho(\gamma) \in L(E)$.
D'après les deux dernières propriétés, pour tout $\gamma \in \Gamma$, pour tout $x \in E$,
$\gamma^{-1}.(\gamma.x) = x = \gamma.(\gamma^{-1}.x)$, donc $\rho(\gamma)$ et $\rho(\gamma^{-1})$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. Ainsi, ρ est une application de Γ dans $GL(E)$. Enfin, la dernière propriété garantit que ρ est un morphisme de groupes.

13°) $\diamond$ Soit $\gamma' \in \Gamma$, on a
$\rho(\gamma') \circ \pi = \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma') \circ \rho(\gamma) = \dfrac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma'\gamma) = \dfrac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma" \in \Gamma} \rho(\gamma") = \pi$ car $\gamma \mapsto \gamma'\gamma$ est une bijection de Γ sur lui-même, dont la bijection réciproque est $\gamma \longmapsto {\gamma'}^{-1}\gamma$.
$\diamond$ On en déduit que $\pi \circ \pi = \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\sum_{\gamma' \in \Gamma} \rho(\gamma') \circ \pi = \dfrac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi = \pi$, donc π est un projecteur.
Si $x \in E_\Gamma$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.x = x$, donc $\pi(x) = x$. Ceci prouve que $E_\Gamma \subset \mathrm{Im}\pi$.
Réciproquement : si $x \in \mathrm{Im}\pi$ alors d'après la question 2, $\pi(x) = x$ donc, pour tout $\gamma' \in \Gamma$, en utilisant que $\rho(\gamma')\pi = \pi$, on obtient $\gamma'.x = \rho(\gamma')(x) = \rho(\gamma') \circ \pi(x) = \pi(x) = x$ et donc $x \in E_\Gamma$. On a ainsi prouvé que $E_\Gamma = \mathrm{Im}\pi$.
$\diamond$ D'après la question 10, la trace d'un projecteur est égale à la dimension de son image, donc $\mathrm{Tr}(\pi) = \dim(E_\Gamma)$.

14°) Soient (E, ρ) et (E', ρ') deux Γ-espaces tels que $\chi_E = \chi_{E'} = \chi$.
$\chi(1_\Gamma) = \chi_E(1_\Gamma) = \mathrm{Tr}(\rho(1_\Gamma)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_E) = \dim(E)$ et $\chi(1_\Gamma) = \chi_{E'}(1_\Gamma) = \dim(E')$,
donc $\dim(E) = \dim(E') = \dim(\chi) = \chi(1_\Gamma)$.

15°) L'application trace étant linéaire, on a
$\dim(E_\Gamma) = \mathrm{Tr}(\pi) = \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Tr}(\rho(\gamma)) = \dfrac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma)$..

16°) Soit $x, y, z \in X$.
$\diamond$ $x = 1_\Gamma.x$, donc $x \; R \; x$. Ainsi, R est réflexive.
$\diamond$ Supposons que $x \; R \; y$. Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $y = \gamma.x$.
Alors $\gamma^{-1}.y = \gamma^{-1}.(\gamma.x) = (\gamma^{-1}\gamma).x = 1_\Gamma.x = x$, donc $y \; R \; x$. Ainsi, R est symétrique.
$\diamond$ Supposons que $x \; R \; y$ et que $y \; R \; z$. Il existe $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tels que $y = \gamma.x$ et $z = \gamma'.y$, donc $z = \gamma'.(\gamma.x) = (\gamma'\gamma).x$. Ainsi, $x \; R \; z$, donc R est transitive.

En conclusion, on a prouvé que R est une relation d'équivalence.

17°) $\diamond$ Soit $\gamma \in \Gamma$. $(e_x)_{x\in X}$ est une base de $\mathbb{K}^X$, donc d'après le cours, il existe un unique endomorphisme $\rho(\gamma)$ de $\mathbb{K}^X$ tel que, pour tout $x \in X$, $\rho(\gamma)(e_x) = e_{\gamma.x}$.
Soit $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Alors $\gamma.(\gamma'.e_x) = \gamma(e_{\gamma'.x}) = e_{\gamma.(\gamma'.x)} = e_{(\gamma\gamma').x} = (\gamma\gamma').e_x$,
donc $\rho(\gamma) \circ \rho(\gamma') = \rho(\gamma\gamma')$.
En particulier, $\rho(\gamma)\rho(\gamma^{-1}) = \rho(1_\Gamma) = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^X} = \rho(\gamma^{-1})\rho(\gamma)$, donc $\rho(\gamma)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^X$ et on vient de montrer que ρ est bien un morphisme de Γ dans $GL(\mathbb{K}^X)$.
$\diamond$ Soit $f \in \mathbb{K}^X$. Il existe $(\lambda_x)_{x\in X} \in \mathbb{K}^X$ tel que $f = \sum_{x\in X} \lambda_x e_x$. Alors pour tout $x \in X$, $f(x) = \lambda_x$, donc : pour tout $f \in \mathbb{K}^X$ et $x \in X$, $e_x^*(f) = f(x)$.
Soit $f \in \mathbb{K}^X$, $\gamma \in \Gamma$ et $x \in X$. $(\gamma.f)(x) = e_x^*(\gamma.f)$, or $\gamma.f = \gamma.\sum_{y\in X} f(y)e_y = \sum_{y\in X} f(y)e_{\gamma.y}$,
mais $\gamma.y = x \iff y = \gamma^{-1}.x$, donc $(\gamma.f)(x) = f(\gamma^{-1}.x)$, ce qui correspond bien à l'affirmation de l'énoncé.

18°) Soit $f \in \mathbb{K}^X$. Alors $f \in E_\Gamma$ si et seulement si $\forall\gamma \in \Gamma,\ \gamma.f = f$, c'est-à-dire si et seulement si $\forall\gamma \in \Gamma,\ \forall x \in X,\ f(\gamma^{-1}.x) = f(x)$.
Mais l'application $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ est une bijection sur Γ, donc $f \in E_\Gamma$ si et seulement si $\forall x \in X,\ \forall\gamma \in \Gamma,\ f(\gamma.x) = f(x)$.
Pour tout $x \in X$, notons $\overline{x}$ l'orbite de X : $\overline{x} = \{\gamma.x/\gamma \in \Gamma\}$.
Alors $f \in E_\Gamma \iff [\forall x \in X,\ \forall y \in \overline{x},\ f(x) = f(y)]$.
Ceci montre que les éléments de E_Γ sont exactement les applications de X dans$\mathbb{K}$ possédant une valeur constante sur chaque orbite.
$\diamond$ Pour tout $x \in X$, notons $f_{\overline{x}} = \sum_{y\in\overline{x}} e_y$.
Montrons que $(f_z)_{z\in X/R}$ est une base de E_Γ.
Si $f \in E_\Gamma$, en notant λ_z la valeur constante de f sur l'orbite z, on peut écrire
$f = \sum_{z\in X/R} \lambda_z f_z$. De plus, pour tout $z \in X/R$, $f_z \in E_\Gamma$, donc $(f_z)_{z\in X/R}$ est une famille génératrice de E_Γ.
Supposons que $\sum_{z\in X/R} \lambda_z f_z = 0$. Pour tout $x \in X$, posons $\lambda_x = \lambda_{\overline{x}}$.
Alors $0 = \sum_{z\in X/R} \lambda_z f_z = \sum_{x\in X} \lambda_x e_x$, or (e_x) est libre, donc les λ_x sont tous nuls, puis également les λ_z. Ainsi, $(f_z)_{z\in X/R}$ est libre. C'est bien une base de E_Γ.
$\diamond$ Alors $\dim(E_\Gamma) = |X/R|$, ce qu'il fallait démontrer.

19°) $\diamond$ Soit $\gamma \in \Gamma$. Pour tout $x \in X$, $\rho(\gamma)(e_x) = \gamma.e_x = e_{\gamma.x}$, donc
$\mathrm{Tr}(\rho(\gamma)) = \sum_{x\in X} e_x^*(\rho(\gamma)(e_x)) = \sum_{x\in X} e_x^*(e_{\gamma.x}) = \sum_{x\in X} \delta_{x,\gamma.x} = r_\gamma$.
On a bien montré que $\chi_X(\gamma) = r_\gamma$.
$\diamond$ D'après la question 18, puis la question 15, $s = \dim(E_\Gamma) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_X(\gamma)$, donc

d'après le point précédent, $\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma = s$, d'où le résultat demandé : la formule de Burnside exprime donc le fait que le nombre d'orbites d'un ensemble X sous l'action d'un groupe est égal à la valeur moyenne du nombre d'éléments de X invariants sous l'action de γ, lorsque γ parcourt tout le groupe.

20°) Γ agit transitivement, donc $s = 1$ et la formule de Burnside devient : $\sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma = |\Gamma|$.
Or, lorsque $\gamma = 1_\Gamma$, $r_\gamma = |X| \geq 2$.
Supposons que $r_\gamma \geq 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ alors
$|\Gamma| = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma = r_{1_\Gamma} + \sum_{\gamma\neq 1_\Gamma} r_\gamma \geq |X| + (|\Gamma| - 1) \geq |\Gamma| + 1$, ce qui est impossible donc il existe γ_0 dans Γ tel que $r_{\gamma_0} = 0$. Alors, pour tout $x \in X$, $\gamma_0.x \neq x$.

Partie IV : Propriétés des caractères

21°) Avec des notations qui parlent d'elles-mêmes,
pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $u \in L(E,F)$, $\gamma.u = \rho_F(\gamma) \circ u \circ [\rho_E(\gamma)]^{-1}$.
On en déduit que, pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, pour tout $u, v \in L(E,F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $\gamma.u \in L(E,F)$;
- $\gamma.(\lambda u + v) = \rho_F(\gamma)(\lambda u + v)[\rho_E(\gamma)]^{-1} = \lambda\rho_F(\gamma)u[\rho_E(\gamma)]^{-1} + \rho_F(\gamma)v[\rho_E(\gamma)]^{-1}$, car $\rho_F(\gamma)$ est linéaire, donc $\gamma.(\lambda u + v) = \lambda(\gamma.u) + (\gamma.v)$;
- $1_\Gamma.u = u$;
- $\gamma.(\gamma'.u) = \rho_F(\gamma)\rho_F(\gamma') \circ u \circ [\rho_E(\gamma')]^{-1} \circ [\rho_E(\gamma)]^{-1} = \rho_F(\gamma\gamma') \circ u \circ [\rho_E(\gamma\gamma')]^{-1}$, donc $\gamma.(\gamma'.u) = (\gamma\gamma').u$.

Ceci prouve d'après la question 12 que $(\gamma, u) \longmapsto \gamma.u$ est une représentation linéaire de Γ sur $L(E,F)$.

22°) Soit $\gamma \in \Gamma$. $\chi_{L(E,F)}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\rho_{L(E,F)}(\gamma)) = \mathrm{Tr}\Big(u \longmapsto \rho_F(\gamma) \circ u \circ [\rho_E(\gamma)]^{-1}\Big)$, donc d'après la question 11, $\chi_{L(E,F)}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\rho_F(\gamma))\mathrm{Tr}(\rho_E(\gamma^{-1})) = \chi_E(\gamma^{-1})\chi_F(\gamma)$.

23°) $\diamond$ $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ est une bijection de Γ donc par changement de variables,
$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)g(\gamma^{-1}) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma^{-1})g(\gamma) = \langle g, f\rangle$.

$\diamond$ Soit $f \in \mathbb{K}^\Gamma$ telle que $\langle f, g\rangle = 0$ pour tout $g \in \mathbb{K}^\Gamma$. Montrons que $f = 0$. Soit $\gamma' \in \Gamma$.
Notons g l'application de Γ dans $\mathbb{K}$ définie par $g(\gamma) = \begin{cases} |\Gamma| & \text{si } \gamma = \gamma'^{-1} \\ 0 & \text{si } \gamma \neq \gamma'^{-1} \end{cases}$.
Alors $0 = \langle f, g\rangle = f(\gamma')$. C'est vrai pour tout $\gamma' \in \Gamma$, donc $f = 0$.

24°) D'après la question précédente,
$\langle \chi_E, \chi_F\rangle = \langle \chi_F, \chi_E\rangle = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_E(\gamma^{-1})\chi_F(\gamma)$, donc d'après la question 22,

$\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dfrac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_{\mathcal{L}(E,F)}(\gamma)$, puis d'après la question 15, $\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim\Big(L(E,F)_\Gamma\Big)$
où $L(E,F)_\Gamma = \{u \in L(E,F) \ / \ \forall \gamma \in \Gamma,\ \ \gamma.u = u\}$.
Or, lorsque $\varphi \in L(E,F)$,

$$\begin{aligned} \varphi \in L(E,F)_\Gamma \quad & \Longleftrightarrow (\forall \gamma \in \Gamma,\ \forall x \in E,\ \gamma.\varphi(\gamma^{-1}x) = \varphi(x)) \\ & \Longleftrightarrow (\forall \gamma \in \Gamma,\ \forall x \in E,\ \varphi(\gamma^{-1}x) = \gamma^{-1}.\varphi(x)) \\ & \Longleftrightarrow (\varphi \in \hom_\Gamma(E,F)) \end{aligned}$$

donc $\hom_\Gamma(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$,
et $\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim(\hom_\Gamma(E,F))$.
$\diamond$ On suppose que $E \neq \{0\}$. Alors $\mathrm{Id}_E \neq 0$, or $\mathrm{Id}_E \in L(E)_\Gamma$ car pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.\mathrm{Id}_E = \rho_E(\gamma)\mathrm{Id}_E\rho_E(\gamma^{-1}) = \rho_E(\gamma\gamma^{-1}) = \mathrm{Id}_E$, donc $L(E)_\Gamma \neq \{0\}$. On en déduit que $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = \dim(L(E)_\Gamma) \in \mathbb{N}^*$.

25°) $\diamond$ D'après la question 12, on munit $\mathbb{K}$ d'une structure de Γ-espace en définissant $\gamma.x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire $\rho(\gamma) = \mathrm{Id}_\mathbb{K}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\chi_\mathbb{K}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_\mathbb{K}) = 1 = \chi_{unit}(\gamma)$, donc χ_{unit} est bien un caractère.
$\diamond$ Par définition de $\langle .,. \rangle$, $\langle \chi_E, \chi_{\mathtt{unit}} \rangle = \dfrac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma)$, donc d'après la question 15, $\langle \chi_E, \chi_{\mathtt{unit}} \rangle = \dim(E_\Gamma)$

26°) Il existe des Γ-espaces E et F tels que $\chi = \chi_E$ et $\chi' = \chi_F$.
Pour tout $(x,y) \in E \times F$ et $\gamma \in \Gamma$, posons $\gamma.(x,y) = (\gamma.x, \gamma.y)$.
On vérifie aisément que, pour tout $(x,y), (x',y') \in E \times F$, $\lambda \in K$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$,
$\gamma.[(x,y) + (x',y')] = \gamma.(x,y) + \gamma.(x',y')$, $\gamma.[\lambda(x,y)] = \lambda[\gamma.(x,y)]$,
$1_\Gamma.(x,y) = (x,y)$ et $(\gamma\gamma').(x,y) = \gamma.[\gamma'.(x,y)]$.
On a ainsi défini une représentation linéaire de Γ sur $E \times F$.
Notons $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_p)$ des bases de E et de F respectivement.
Pour tout $(x,y) \in E \times F$,
$(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i, \sum_{j=1}^p f_j^*(y) f_j \Big) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)(e_i, 0) + \sum_{j=1}^p f_j^*(y)(0, f_j)$,
donc $b = ((e_1,0), \ldots, (e_n,0), (0,f_1), \ldots, (0,f_p))$ est une famille génératrice de $E \times F$, de cardinal $n + p = \dim(E \times F)$. C'est donc une base de $E \times F$ et l'égalité précédente montre que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in \mathbb{N}_p$, pour tout $(x,y) \in E \times F$, $b_i^*(x,y) = e_i^*(x)$ et $b_{n+j}^*(x,y) = f_j^*(y)$.
Soit $\gamma \in \Gamma$. $\chi_{E \times F}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\rho_{E \times F}(\gamma)) = \sum_{k=1}^{n+p} b_k^*(\gamma.b_k) = \sum_{i=1}^n e_i^*(\gamma.e_i) + \sum_{j=1}^p f_j^*(\gamma.f_j)$, donc $\chi_{E \times F}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\rho_E(\gamma)) + \mathrm{Tr}(\rho_F(\gamma))$. Ainsi, $\chi_{E \times F} = \chi_E + \chi_F$, ce qui prouve que $\chi + \chi'$ est bien un caractère.

27°) Il existe un Γ-espace E tel que $\chi = \chi_E$.
On reprend la structure de Γ-espace définie sur $\mathbb{K}$ en question 25.
On a $\chi_{E^*} = \chi_{L(E,\mathbb{K})} = \chi_E^*.\chi_\mathbb{K}$, d'après la question 22. Ainsi, $\chi_{E^*} = \chi_E^*.\chi_{unit} = \chi_E^*$.

On a donc montré que $\chi_E^* = \chi_{E^*}$, ce qui prouve que χ^* est un caractère.

28°) Il existe des Γ-espaces E et F tels que $\chi = \chi_E$ et $\chi' = \chi_F$.
Alors comme $(\chi^*)^* = \chi$, on a $\chi\chi' = (\chi^*)^*\chi' = \chi_{E^*}^*\chi_F = \chi_{L(E^*,F)}$,
donc $\chi\chi'$ est un caractère.

Ce problème est une adaptation d'un sujet donné à l'ENS Lyon en 1997. Les parties I et II mettent en place des notions qui feront plus tard partie de votre cours d'algèbre linéaire. Les parties III et IV correspondent aux parties I et II du sujet d'ENS. Ce dernier possède encore 2 parties qui développent la théorie des représentations linéaires de groupes. Le sujet ainsi qu'un corrigé sont facilement accessibles sur internet.