DM 30 : un corrigé

Partie I : applications bilinéaires

1°) $\diamond$ Pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a bien : $(\alpha x+y)z = \alpha(xz)+(yz)$ et $x(\alpha z+t) = \alpha(xz)+(xt)$. Ainsi, $(x, y) \longmapsto xy$ est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
$\diamond$ On suppose que A est une $\mathbb{K}$-algèbre. Alors le calcul précédent est encore valable : Pour tout $x, y, z, t \in A$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a bien : $(\alpha x + y)z = \alpha(xz) + (yz)$ et $x(\alpha z + t) = \alpha(xz) + (xt)$: $(x, y) \longmapsto xy$ est une application bilinéaire de A^2 dans A.

2°) Soit $f_0, f_1 \in E$, $g_0, g_1 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
b(\alpha f_0 + f_1, g_0) &= \int_0^1 (\alpha f_0(t) + f_1(t))(g_0(t) + 2g_0'(t))\ dt \\
&= \alpha \int_0^1 f_0(t)(g_0(t) + 2g_0'(t))\ dt + \int_0^1 f_1(t)(g_0(t) + 2g_0'(t))\ dt \\
&= \alpha b(f_0, g_0) + b(f_1, g_0), \text{ et} \\
b(f_0, \alpha g_0 + g_1) &= \int_0^1 f_0(t)(\alpha g_0(t) + 2\alpha g_0'(t) + g_1'(t) + 2g_1'(t))\ dt \\
&= \alpha \int_0^1 f_0(t)(g_0(t) + 2g_0'(t))\ dt + \int_0^1 f_0(t)(g_1(t) + 2g_1'(t))\ dt \\
&= \alpha b(f_0, g_0) + b(f_0, g_1),
\end{aligned}$$

donc b est bien une application bilinéaire.

3°) D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{F}(E \times F, G)$ des applications de $E \times F$ dans G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, car G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrons que $B(E, F; G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E \times F, G)$.
Déjà, l'application identiquement nulle est clairement bilinéaire, donc $B(E, F; G) \neq \emptyset$.
Soit $f, g \in B(E, F; G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Soit $x, y \in E$, $z, t \in F$ et $\beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha f + g)(\beta x + y, z) &= \alpha f(\beta x + y, z) + g(\beta x + y, z) \\
&= \alpha(\beta f(x, z) + f(y, z)) + \beta g(x, z) + g(y, z) \text{ et}
\end{aligned}$$

$\beta(\alpha f + g)(x, z) + (\alpha f + g)(y, z) = \beta\alpha f(x, z) + \beta g(x, z) + \alpha f(y, z) + g(y, z)$,
donc $(\alpha f + g)(\beta x + y, z) = \beta(\alpha f + g)(x, z) + (\alpha f + g)(y, z)$.
De même, on montre que $(\alpha f + g)(x, \beta z + t) = \beta(\alpha f + g)(x, z) + (\alpha f + g)(x, t)$, donc $\alpha f + g \in B(E, F; G)$, ce qu'il fallait démontrer.

4°) Lorsque $b \in B(E, F; G)$ et $x \in E$, notons $b(x, .)$ l'application de F dans G définie par : pour tout $y \in F$, $b(x, .)(y) = b(x, y)$.

Pour tout $z, t \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$b(x,.)(\alpha z + t) = b(x, \alpha z + t) = \alpha b(x, z) + b(x, t) = \alpha b(x,.)(z) + b(x,.)(t)$,
donc $b(x,.) \in L(F, G)$.
Ainsi, l'application $\varphi(b) \ : \ x \longmapsto b(x,.)$ est une application de E dans $L(F, G)$.
Vérifions que $\varphi(b)$ est linéaire : soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $z \in F$,
$[\varphi(b)(\alpha x + y)](z) = b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z) = [\alpha\varphi(b)(x) + \varphi(b)(y)](z)$, donc $\varphi(b)(\alpha x + y) = \alpha\varphi(b)(x) + \varphi(b)(y)$.
Ainsi φ est une application de $B(E, F; G)$ dans $L(E, L(F, G))$.
Il reste à montrer que c'est un isomorphisme.
Soit $b, b' \in B(E, F; G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$,
$\varphi(\alpha b + b')(x)(y) = (\alpha b + b')(x, y) = \alpha b(x, y) + b'(x, y) = [\alpha\varphi(b) + \varphi(b')](x, y)$, donc φ est linéaire.
Soit $b \in \mathrm{Ker}\varphi$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, $0 = \varphi(b)(x)(y) = b(x, y)$, donc $b = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, donc φ est injective.
Soit $\ell \in L(E, L(F, G))$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, posons $b(x, y) = \ell(x)(y)$. On vérifie que b est bilinéaire de $E \times F$ dans G. De plus, pour tout $(x, y) \in E \times F$,
$\varphi(b)(x)(y) = b(x, y) = \ell(x)(y)$, donc $\varphi(b) = \ell$, ce qui prouve que φ est surjective.
On a donc montré que l'application $b \longmapsto (x \longmapsto b(x,.))$ est un isomorphisme de $B(E, F; G)$ dans $L(E, L(F, G))$.

Partie II : unicité du produit tensoriel

5°) Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Lorsque $\ell \in L(P, G)$, u étant une application de $E \times F$ dans P, par composition, $\ell \circ u$ est une application de $E \times F$ dans G. De plus, $\ell \circ u$ est bien une application bilinéaire : en effet, pour tout $x, y \in E$, $z, t \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$\ell \circ u(\alpha x + y, z) = \ell(\alpha u(x, z) + u(y, z)) = \alpha\ell(u(x, z)) + \ell(u(y, z))$, pour bilinéarité de u puis par linéarité de ℓ, donc $\ell \circ u(\alpha x + y, z) = \alpha\ell \circ u(x, z) + \ell \circ u(y, z)$.
De même, on vérifie que $\ell \circ u(x, \alpha z + t) = \alpha\ell \circ u(x, z) + \ell \circ u(x, t)$.
Ainsi $\varphi \ : \ \ell \longmapsto \ell \circ u$ est une application de $L(P, G)$ dans $B(E, F; G)$.
Il reste à montrer qu'elle est linéaire.
Soit $\ell, \ell' \in L(P, G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$,
$\varphi(\alpha\ell + \ell')(x, y) = (\alpha\ell + \ell')(u(x, y)) = \alpha\ell(u(x, y)) + \ell'(u(x, y)) = [\alpha\varphi(\ell) + \varphi(\ell')](x, y)$, ce qu'il fallait démontrer.

6°) D'après l'énoncé, P muni de u est un produit tensoriel de E par F si et seulement si, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel G, pour toute application bilinéaire b de $E \times F$ dans G, il existe une unique application linéaire ℓ de P dans G telle que $b = \ell \circ u$.
$\diamond$ Supposons que P' muni de u' est un produit tensoriel de E par F.
u' est une application bilinéaire de $E \times F$ dans P', donc en appliquant l'affirmation précédente avec $G = P'$ et $b = u'$, il existe une application linéaire h de P dans P' telle que $u' = h \circ u$.
Mais (P, u) et (P', u') jouent des rôles symétriques, donc il existe également une application linéaire h' de P' dans P telle que $u = h' \circ u'$.

On en déduit que $u = h' \circ h \circ u = Id_P \circ u$, or d'après la propriété énoncée en début de question avec $G = P$ et $b = u$ il existe une unique application h'' de P dans P telle que $u = h'' \circ u$, donc $h' \circ h = Id_P$. Par symétrie, on obtient également que $h \circ h' = Id_{P'}$, donc h est une bijection linéaire, c'est un isomorphisme de P dans P'.

$\diamond$ Supposons qu'il existe un isomorphisme h de P et P' tel que $u' = h \circ u$.

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Notons $\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & L(P,G) & \longrightarrow & B(E,F;G) \\ & \ell & \longmapsto & \ell \circ u \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & L(P',G) & \longrightarrow & B(E,F;G) \\ & \ell' & \longmapsto & \ell' \circ u' = \ell' \circ h \circ u \end{array}$.

On sait que φ_0 est un isomorphisme et il s'agit de montrer que φ_1 est un isomorphisme.

Notons $\begin{array}{rccc} \Psi : & L(P',G) & \longrightarrow & L(P,G) \\ & \ell' & \longmapsto & \ell' \circ h \end{array}$.

Pour tout $\ell' \in L(P',G)$, $\varphi_0 \circ \Psi(\ell') = \varphi_0(\ell' \circ h) = \ell' \circ h \circ u = \varphi_1(\ell')$, donc $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \Psi$, et il suffit de montrer que Ψ est un isomorphisme. C'est clair car on vérifie que Ψ est bien linéaire et que si l'on note $\Psi' = (\ell \longmapsto \ell \circ h^{-1})$, alors $\Psi \circ \Psi' = Id_{L(P,G)}$ et $\Psi' \circ \Psi = Id_{L(P',G)}$.

Partie III : quotient d'espaces vectoriels

7°) Pour tout $x \in E$, $x - x = 0 \in F$, car F est un sous-espace vectoriel, donc $x \; R \; x$, ce qui prouve que R est réflexive.

Soit $x, y \in E$ tels que $x \; R \; y$. Alors $y - x = -(x - y) \in F$ car $x - y \in F$ et car F est un sous-espace vectoriel, donc $y \; R \; x$, ce qui prouve que R est symétrique.

Soit $x, y, z \in E$ tels que $x \; R \; y$ et $y \; R \; z$. Alors $x - y \in F$ et $y - z \in F$, or F est stable pour l'addition, donc $x - z = x - y + y - z \in F$. Ainsi, $x \; R \; z$, ce qui prouve que R est transitive.

On a donc montré que R est une relation d'équivalence.

8°)

$\diamond$ Pour montrer que cette définition de l'addition dans E/F est correcte, il faut établir que la quantité $\overline{x+y}$ dépend seulement de $\overline{x}$ et de $\overline{y}$, c'est-à-dire que si $\overline{x'} = \overline{x}$ et $\overline{y'} = \overline{y}$, alors $\overline{x'+y'} = \overline{x+y}$. C'est vrai car si $\overline{x'} = \overline{x}$ et $\overline{y'} = \overline{y}$, alors $x - x' \in F$ et $y - y' \in F$, donc $(x+y) - (x'+y') = (x - x') + (y - y') \in F$ puis $\overline{x'+y'} = \overline{x+y}$.

De même, il faut montrer que $\overline{\alpha x}$ ne dépend que de $\overline{x}$ (et de α) : supposons que $\overline{x} = \overline{x'}$. Alors $x - x' \in F$, mais F est un sous-espace vectoriel, donc $\alpha(x - x') \in F$, puis $\overline{\alpha x} = \overline{\alpha x'}$.

Il est clair que pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\overline{x} + \overline{y} \in E/F$ et $\alpha \overline{x} \in E/F$.

$\diamond$ Les propriétés caractéristiques d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour E/F se déduisent alors facilement de celles de E :

- Pour tout $x, y, z \in E$, $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x + (y+z)} = \overline{(x+y)+z}$, car l'addition dans E est associative, donc $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$. Ainsi l'addition dans E/F est aussi associative.
- De même, on montre la commutativité : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$.
- Pour tout $x \in E$, $\overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$, donc $\overline{0}$ est neutre.

— Pour tout $x \in E$, $\overline{x} + \overline{-x} = \overline{0}$, donc $\overline{-x}$ est le symétrique de $\overline{x}$, ce qui permettra d'écrire que $\overline{-x} = -\overline{x}$.

On a ainsi montré que $(E/F, +)$ est un groupe abélien.

De plus, on vérifie facilement que, pour tout $x, y \in E$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

— $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = (\alpha\overline{x}) + (\alpha\overline{y})$,
— $(\alpha + \beta)\overline{x} = (\alpha\overline{x}) + (\beta\overline{x})$,
— $(\alpha\beta)\overline{x} = \alpha(\beta\overline{x})$ et
— $1_{\mathbb{K}}\overline{x} = \overline{x}$.

Ainsi, $(E/F, +, .)$ est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

9°) Posons $\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & E/F \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$. D'après la question précédente, pour tout $x, y \in G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$, donc f est une application linéaire.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f$. Alors $\overline{x} = 0 = \overline{0}$, donc $x \in F$. Ainsi, $x \in F \cap G = \{0\}$, donc $\mathrm{Ker} f = \{0\}$, ce qui prouve que f est injective.

Soit $z \in E/F$. Il existe $x \in E$ tel que $z = \overline{x}$. Mais $E = F + G$, donc il existe $y \in F$ et $t \in G$ tel que $x = y + t$. Alors $z = \overline{y} + \overline{t} = \overline{t}$, car $y \in F$ donc $\overline{y} = \overline{0} = 0$. Ainsi, $z = f(t)$, ce qui prouve que f est surjective.

Ainsi f est un isomorphisme de G sur E/F, ce qu'il fallait démontrer.

10°)

◇ Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$. Ainsi, $x + y + z = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $x = y = z = \lambda$. On en déduit que $0 = x + y + z = 3\lambda$, donc $\lambda = 0$ puis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.

◇ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$. On doit avoir $\lambda + a = x$, $\lambda + b = y$ et $\lambda - a - b = z$. En sommant ces trois égalités, on obtient $3\lambda = x + y + z$.

Posons donc $\lambda = \frac{1}{3}(x + y + z)$, $a = x - \lambda$ et $b = y - \lambda$. Alors, on vérifie que $\lambda + a = x$, $\lambda + b = y$ et $\lambda - a - b = z$: pour la dernière égalité,

$\lambda - a - b = \frac{1}{3}(x + y + z) - (x - \frac{1}{3}(x + y + z) - (y - \frac{1}{3}(x + y + z)) = z$.

Ainsi, $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} \in G + F$, donc $E = F + G$. On a vu que $F \cap G = \{0\}$, donc $E = F \oplus G$.

◇ Alors, d'après la question précédente, $\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & E/F \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$ est un isomorphisme, donc $E/F = \mathrm{Im}(f) = f(G) = \{f(\lambda e)\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, en posant $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E/F = \{\lambda \overline{e}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, donc E/F est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $\overline{e}$. Or $e \neq 0$ et f est injective, donc $\overline{e} \neq 0$, ce qui prouve que E/F est bien une droite vectorielle.

Partie IV : existence du produit tensoriel

11°) D'après le cours, $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, donc il s'agit de montrer que $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
La famille nulle appartient à $\mathbb{K}^{(I)}$, donc $\mathbb{K}^{(I)} \neq \emptyset$.
Soit $((a_i), (b_i), \alpha) \in \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}$.
Soit $i \in I$. Si $a_i = 0$ et $b_i = 0$, alors $\alpha a_i + b_i = 0$. La contraposée de cette implication est : $\forall i \in I\ \ [\alpha a_i + b_i \neq 0 \Longrightarrow (a_i \neq 0 \text{ ou } b_i \neq 0)]$, donc
$\{i \in I / \alpha a_i + b_i \neq 0\} \subset (\{i \in I / a_i \neq 0\} \cup \{i \in I / b_i \neq 0\})$, ainsi $\{i \in I / \alpha a_i + b_i \neq 0\}$ est fini, ce qui prouve que $\alpha(a_i) + (b_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$, ce qu'il fallait démontrer.

12°) $\diamond$ Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i c_i = \sum_{\substack{i\in I \\ \text{tel que } \alpha_i \neq 0}} \alpha_i (\delta_{i,j})_{j\in I}$. Il s'agit bien d'une somme finie, donc $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i c_i = \Bigg(\sum_{\substack{i\in I \\ \text{tel que } \alpha_i \neq 0}} \alpha_i \delta_{i,j} \Bigg)_{j\in I} = (\alpha_j)_{j\in I} = (\alpha_i)_{i\in I}$.

$\diamond$ Soit $x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. Pour tout $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$, on vient de montrer que $\displaystyle x = \sum_{i\in I} \alpha_i c_i \Longleftrightarrow x = (\alpha_i)_{i\in I}$, donc cela prouve l'existence et l'unicité d'une famille $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $\displaystyle x = \sum_{i\in I} \alpha_i c_i$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Notons $\begin{array}{cccc} u : & E \times F & \longrightarrow & P \\ & (e, f) & \longmapsto & \overline{c_{e,f}} \end{array}$. Soit $e, e' \in E$, $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
$u(\alpha e + e', f) = \overline{c_{\alpha e + e', f}}$, or $c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e,f} - c_{e',f} \in A_1 \subset S$, donc
$0 = \overline{c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e,f} - c_{e',f}} = \overline{c_{\alpha e + e', f}} - \alpha \overline{c_{e,f}} - \overline{c_{e',f}} = u(\alpha e + e', f) - \alpha u(e, f) - u(e', f)$.
On a donc prouvé que $u(\alpha e + e', f) = \alpha u(e, f) + u(e', f)$.
De même on montre que $u(e, \alpha f + f') = \alpha u(e, f) + u(e, f')$, donc u est bilinéaire.

14°) Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $b \in B(E, F; G)$. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique application linéaire $\ell \in L(P, G)$ telle que $b = \ell \circ u$.
$\diamond$ Commençons par l'unicité : supposons que $\ell, \ell' \in L(P, G)$ et $b = \ell \circ u = \ell' \circ u$. Alors, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\ell(\overline{c_{x,y}}) = \ell'(\overline{c_{x,y}})$, donc $\overline{c_{x,y}} \in \mathrm{Ker}(\ell - \ell')$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\ell - \ell')$ contient $V = \mathrm{Vect}(\{\overline{c_{x,y}}\ /\ (x, y) \in E \times F\})$,
or $\displaystyle V = \Bigg\{ \sum_{(x,y)\in E\times F} \alpha_{x,y} \overline{c_{x,y}}\ /(\alpha_{x,y}) \in \mathbb{K}^{(E\times F)} \Bigg\} = \Bigg\{ \overline{\sum_{(x,y)\in E\times F} \alpha_{x,y} c_{x,y}}\ /(\alpha_{x,y}) \in \mathbb{K}^{(E\times F)} \Bigg\}$
donc $V = \{\overline{X}\ /\ X \in Q\}$, car $(c_{x,y})_{(x,y)\in E\times F}$ est une base de Q. Ainsi, $V = P$, donc $\mathrm{Ker}(\ell - \ell') = P$, donc $\ell - \ell' = 0$, ce qui prouve l'unicité.

$\diamond$ *Existence :*

Posons $\begin{array}{rccl} L: & Q = \mathbb{K}^{(E\times F)} & \longrightarrow & G \\ & X = (\alpha_{x,y})_{(x,y)\in E\times F} & \longmapsto & L(X) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in E\times F} \alpha_{x,y} b(x,y) \end{array}$.

Montrons que L est linéaire : Soit $X = (\alpha_{x,y}) \in Q$, $Y = (\beta_{x,y}) \in Q$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$L(\lambda X + Y) = L((\lambda\alpha_{x,y} + \beta_{x,y})) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in E\times F} (\lambda\alpha_{x,y} + \beta_{x,y})b(x,y) = \lambda L(X) + L(Y)$.

Montrons que $S \subset \mathrm{Ker}(L)$: Soit $e, e' \in E$, $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Par linéarité de L, $L(c_{\alpha e+e',f} - \alpha c_{e,f} - c_{e',f}) = L(c_{\alpha e+e',f}) - \alpha L(c_{e,f}) - L(c_{e',f})$, puis par définition de L, $L(c_{\alpha e+e',f} - \alpha c_{e,f} - c_{e',f}) = b(\alpha e + e', f) - \alpha b(e,f) - b(e',f)$, or b est bilinéaire, donc $c_{\alpha e+e',f} - \alpha c_{e,f} - c_{e',f} \in \mathrm{Ker}(L)$.
De même, on montre que, pour tout $e \in E$, $f, f' \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$c_{e,\alpha f+f'} - \alpha c_{e,f} - c_{e,f'} \in \mathrm{Ker}(S)$, donc $\mathrm{Ker}(S)$ contient $\mathrm{Vect}(A_1 \cup A_2) = S$.
Ainsi, pour tout $X, Y \in Q$ tels que $\overline{X} = \overline{Y}$, $X - Y \in S$, donc $L(X - Y) = 0$, donc $L(X) = L(Y)$. Ainsi, $L(X)$ ne dépend que de $\overline{X}$, donc on peut poser, pour tout $X \in Q$, $\ell(\overline{X}) = L(X)$. Ceci définit une application ℓ de P dans G. Montrons que ℓ convient.
Pour tout $X, Y \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$\ell(\alpha\overline{X} + \overline{Y}) = \ell(\overline{\alpha X + Y}) = L(\alpha X + Y) = \alpha L(X) + L(Y) = \alpha\ell(\overline{X}) + \ell(\overline{Y})$,
donc $\ell \in L(P, G)$.
Soit $(x,y) \in E \times F$. $\ell \circ u(x,y) = \ell(\overline{c_{x,y}}) = L(c_{x,y}) = b(x,y)$, donc $\ell \circ u = b$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie V : Newton $\Longleftrightarrow$ Leibniz

15°) Par récurrence sur n, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{at}) = a^n e^{at}$.
Posons $f(t) = e^{at}$ et $g(t) = e^{bt}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Partons de la formule de Leibniz : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(fg)^{(n)}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$,
or $fg(t) = e^{(a+b)t}$, donc on obtient : $(a+b)^n e^{(a+b)t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k e^{at} b^{n-k} e^{bt}$. On en déduit la formule du binôme de Newton en simplifiant par $e^{(a+b)t}$, qui est bien non nul.

16°) L'application $(f,g) \longmapsto f' \otimes g$ est clairement bilinéaire de $E \times E$ dans $E \otimes E$, donc par définition du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire d_1 de $E \otimes E$ dans $E \otimes E$ telle que, pour tout $(f,g) \in E^2$, $d_1(f \otimes g) = f' \otimes g$. Un raisonnement similaire établit l'existence et l'unicité de d_2 et de p.

17°) Soit $f, g \in E$. $dp(f \otimes g) = d(fg) = f'g + fg'$
et $p(d_1 + d_2)(f \otimes g) = p(f' \otimes g + f \otimes g') = f'g + fg'$, par linéarité de p, donc pour tout $f, g \in E$, $dp(f \otimes g) = p(d_1 + d_2)(f \otimes g)$.
Or d'après la question 14, avec les notations de cette question,
pour tout $z \in P = E \otimes F$, il existe $(\alpha_{x,y})_{(x,y)\in E\times F} \in \mathbb{R}^{(E\times F)}$

tel que $z = \overline{(\alpha_{x,y})_{(x,y)\in E\times F}} = \overline{\sum_{(x,y)\in E\times F} \alpha_{x,y} c_{x,y}} = \sum_{(x,y)\in E\times F} \alpha_{x,y}\overline{c_{x,y}}$,

donc $z = \sum_{(x,y)\in E\times F} \alpha_{x,y} x \otimes y$.

Ainsi, avec les notations de la question actuelle, $E \otimes E = \mathrm{Vect}(\{f \otimes g \ / \ f, g \in E\})$. Or on vient de voir que $\mathrm{Ker}(dp - p(d_1 + d_2))$ contient $\{f \otimes g \ / \ f, g \in E\}$, donc il contient $E \otimes E$. Ainsi, $dp - p(d_1 + d_2) = 0$.

On a donc prouvé que $dp = p(d_1 + d_2)$. On en déduit alors facilement par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^n p = p(d_1 + d_2)^n$.

18°) Pour tout $f, g \in E$, $d_1 d_2(f \otimes g) = d_1(f \otimes g') = f' \otimes g' = d_2 d_1(f \otimes g)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(d_1 d_2 - d_2 d_1)$ contient $\{f \otimes g \ / \ f, g \in E\}$ et comme précédemment, on en déduit que $d_1 d_2 = d_2 d_1$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(d_1 + d_2)^n$ dans l'anneau $(L(E \otimes E), +, \circ)$: si l'on fixe $n \in \mathbb{N}$, $(d_1 + d_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_1^k d_2^{n-k}$.

On en déduit alors la formule de Leibniz : pour tout $f, g \in E$

$(fg)^n = d^n p(f \otimes g) = p(d_1 + d_2)^n (f \otimes g) = p\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_1^k d_2^{n-k}\Big)(f \otimes g)$,

donc $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.