MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 15 : du lundi 27 janvier au vendredi 31.

Liste des questions de cours

1°) Montrer que $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

2°) En posant $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, montrer que l'ensemble des applications bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel normé.

3°) Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

4°) Si E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E, montrer que l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

5°) Si E_1, ..., E_p sont p espaces vectoriels normés, montrer que sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

6°) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N et $\|.\|$, montrer que, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|.\|}{\longrightarrow}} l$.

7°) Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $(x_n) \in E^\mathbb{N}$ telles que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer que $\alpha_n.x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.x$.

8°) Soit (u_n) une suite de scalaires vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Donner une expression de u_n en fonction de n. Démontrez-le.

9°) Déterminer la limite en $+\infty$ de $(1 + \frac{1}{n})^n$.

10°) Enoncer le théorème de la limite d'une suite monotone. Démontrer-le dans le cas d'une suite croissante majorée.

11°) Montrer que a est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N\ d(x_n, a) < \varepsilon$.

12°) Enoncer et démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

13°) Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$: énoncé et démonstration, en supposant que le théorème est déjà démontré pour les suites de réels.

Thèmes de la semaine : espaces vectoriels, normes et suites

1 Espaces vectoriels

cf programme précédent.
Il serait bon de donner au moins un exercice sur ce thème.

2 Espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

2.1 Définition d'une norme

Corollaire de l'inégalité triangulaire.

Vecteurs unitaires.

Restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel.

Les normes 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{K}^n$.

Hors programme : pour $p \in [1, +\infty[$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Normes 1,2, ∞, et plus généralement normes $p \in [1, +\infty[$ (hors programme), sur un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

2.2 Distance

Distance associée une norme.

Définition d'un espace métrique.
Seul cas au programme : une partie A d'un espace vectoriel normé munie de la restriction sur A^2 de la distance associée à la norme est un espace métrique.

Boules ouvertes, boules fermées, sphères.
Boule unité.
Les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

Dans un espace métrique, distance d'un point à une partie non vide, distance entre deux parties non vides, diamètre d'une partie non vide A noté $\delta(A)$.
Le diamètre d'une boule fermée de rayon r est inférieur à $2r$. Il est égal à $2r$ dans le cas d'un espace vectoriel normé.
Si $\emptyset \neq A \subset B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Parties bornées d'un espace vectoriel normé.

Soient A un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé . On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E. Pour $f \in \mathcal{B}(A, E)$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{a \in A} \|f(a)\|$.

Alors $(\mathcal{B}(A, E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé .

Soit E un espace vectoriel normé. On note $l^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E.
Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(E)$, on note $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$: $(l^\infty(E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

2.3 Applications k-Lipschitziennes

Une composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Si E est un espace vectoriel normé, l'application $\|.\|$ est 1-lipschitzienne.

Si E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

L'application $i^{\text{ème}}$ projection $p_i : \begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$ est 1-lipschitzienne lorsque $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de l'une de ses trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.

2.4 Normes équivalentes

$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si $Id_E\ : (E, \|.\|_1) \longrightarrow (E, \|.\|_2)$ et $Id_E\ : (E, \|.\|_2) \longrightarrow (E, \|.\|_1)$ sont lipschitziennes.

Si E_1, ..., E_p sont p espaces vectoriels normés, alors sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes équivalentes sur E, alors une partie A de E est bornée pour $\|.\|_1$ si et seulement si elle est bornée pour $\|.\|_2$.
Si f est une application lipschitzienne de E dans F, alors elle reste lipschitzienne si l'on remplace dans E et F les normes par des normes équivalentes.

3 Limite d'une suite dans un espace métrique (E, d)

Unicité de la limite.
Suites convergentes, suites divergentes.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N et $\|.\|$, alors, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|.\|}{\longrightarrow}} l$.

Toute suite convergente est bornée.

Notation. Pour la fin de ce paragraphe, on suppose que E est un espace vectoriel normé.

La somme de deux suites convergentes de vecteurs converge vers la somme des limites.
Si $(x_n + y_n)$ converge, alors (x_n) et (y_n) ont la même nature.

Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

— Si l'une des suites est bornée et si l'autre tend vers 0, alors $\alpha_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, alors $\alpha_n.x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.x$.

Une suite (x_n) à valeurs dans un produit cartésien de p espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses p suites composantes convergent et dans ce cas, la limite de (x_n) est égale au p-uplet dont les composantes sont les limites des suites composantes.
Propriété similaire pour une suite à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, en fonction des suites coordonnées.

4 Suites de complexes

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.

Suites arithmético-géométriques.
Suites homographiques.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

5 Suites de réels

5.1 Limites infinies

Divergence vers $+\infty$ (resp : $-\infty$) pour une suite de réels.
Divergence vers ∞ pour une suite d'un espace métrique.

Composition des limites : si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (où $x_n \in E$) et $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ avec $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Pour $x_n \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites, avec des limites éventuellement infinies.
Formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour étudier $a_n^{b_n}$ lorsque a_n et b_n dépendent de n, on remplace $a_n^{b_n}$ par $e^{b_n \ln(a_n)}$.

5.2 limites et relation d'ordre

Principe des gendarmes.

Lemme du tunnel : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Si $a < \ell < b$. apcr, $a < u_n < b$.
Le lemme du tunnel est faux avec des inégalités larges.

Si $a_n \leq b_n$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, sous condition d'existence des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Ce résultat est faux avec des inégalités strictes.

Si X est une partie non vide de $\mathbb{R}$, il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup(X)$.

Théorème de la limite monotone.
Comportement asymptotique d'une suite géométrique.

5.3 Suites adjacentes

Si (x_n) et (y_n) sont adjacentes avec (x_n) croissante, alors ces deux suites convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $x_p \leq \ell \leq y_q$.

Théorème des segments emboîtés : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, décroissante au sens de l'inclusion, dont les longueurs tendent vers 0. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

6 Les suites extraites

On se place dans un espace métrique quelconque.
Si une suite dans E converge vers ℓ, toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.

Une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est une suite extraite de (x_n).

valeurs d'adhérence d'une suite en tant que limite d'une suite extraite.

Propriété. (hors programme). a est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N\ d(x_n, a) < \varepsilon$,
c'est-à-dire si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Lemme des pics : De toute suite de réels on peut extraire une suite monotone.
Hors programme : $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$.
Théorème de Bolzano-Weierstrass dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

7 Suites de Cauchy (hors programme)

Toute suite convergente de E est une suite de Cauchy.

Toute suite de Cauchy de E est bornée.

Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Espaces métriques complets, espaces de Banach.
Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont de Banach.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Séries de vecteurs (sauf séries alternées).