DM 32
Un théorème fondamental de géométrie projective

Partie I : Isomorphismes de corps

1°) Montrer que l'application c, définie par $c(z) = \overline{z}$ est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ (on pourra admettre toute propriété usuelle portant sur la conjugaison d'un complexe).

2°) Existe-t-il un isomorphisme du corps $\mathbb{Q}$ dans le corps $\mathbb{R}$?

3°) Montrer que $Id_{\mathbb{Q}}$ est le seul automorphisme du corps $\mathbb{Q}$.

4°) Montrer que $Id_{\mathbb{R}}$ est le seul automorphisme du corps $\mathbb{R}$.

5°) On pose $\mathbb{K} = \{a + \sqrt{2}b \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps et déterminer ses automorphismes.

Partie II : Applications semi-linéaires

Dans toute la suite du problème :

— $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ désignent deux corps ;

— E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel ;

Lorsque σ est un isomorphisme du corps $\mathbb{K}$ sur le corps $\mathbb{L}$ et que f est une application de E dans F, on dit que f est σ-linéaire si et seulement si

— pour tout $x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

— pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \sigma(\lambda)f(x)$.

6°) Avec les notations de la question 1, montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \overline{x} + \overline{y} \\ \overline{x} - \overline{y} \end{pmatrix}$ est c-linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même.

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des applications c-linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$.

Pour la fin de cette partie, on suppose que σ est un isomorphisme du corps $\mathbb{K}$ sur le corps $\mathbb{L}$ et que f est une application σ-linéaire de E dans F.

8°) Montrer que l'image directe par f de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F et que l'image réciproque par f de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

9°) Si f est bijective et si E est de dimension finie, montrer que F est aussi de dimension finie et que $\dim(F) = \dim(E)$.

Partie III : Projectivités

Pour toute la suite de ce problème, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E et $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de F.
On appelle projectivité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ toute application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ bijective et telle que f et f^{-1} sont croissantes pour l'inclusion.

10°) On suppose que σ est un isomorphisme du corps $\mathbb{K}$ sur le corps $\mathbb{L}$ et que f est une application bijective et σ-linéaire de E dans F. Montrer que l'application $A \longmapsto f(A)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est une projectivité.

11°) Soit $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnées et f une application bijective de A dans B telle que f et f^{-1} sont croissantes. Soit X une partie de A.
On suppose que X et $f(X)$ possèdent chacun une borne supérieure.
Montrer que $f(\sup(X)) = \sup(f(X))$.

Pour toute la suite de ce problème, f désigne une projectivité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
En particulier, lorsque A est un sous-espace vectoriel de E, $f(A)$ est défini et c'est un sous-espace vectoriel de F. Cependant, il est important de noter que lorsque $x \in E$, la quantité $f(x)$ n'est pas définie en général, même si c'était le cas en question 10.

12°) Soit I un ensemble non vide quelconque et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $f\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)$.

Partie IV : les projectivités conservent la dimension

14°) Montrer que $f(\{0\}) = \{0\}$.

15°) Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $A \neq \{0\}$. Montrer que A est une droite si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{E},\ \ [(B \neq \{0\}) \wedge (B \subset A) \Longrightarrow B = A].$$

En déduire que l'image par f d'une droite de E est une droite de F.

16°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$ est directe si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est directe et si $A_{n+1} \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \{0\}$.

En déduire que si la somme $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est directe, alors la somme $\sum_{i=1}^{n} f(A_i)$ est également directe et que l'on peut écrire $f\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigoplus_{i=1}^{n} f(A_i)$.

17°) Soit A un sous-espace vectoriel de E de dimension finie égale à n.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de A, montrer que $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\mathbb{K}e_i$ désigne la droite engendrée par e_i : $\mathbb{K}e_i = \{\lambda e_i \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$.
En déduire que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie et que $\dim(f(A)) = \dim(A)$.

18°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et $(y_1, \ldots, y_p) \in F^p$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $f(\mathbb{K}x_i) = \mathbb{L}y_i$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si $(y_1, \ldots, y_p)$ est libre.

Partie V : Réciproque de la question 10

Pour toute la suite du problème, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, où $n \geq 3$.

19°) Soit x et y deux vecteurs de E tels que la famille (x, y) est libre.
Montrer qu'il existe deux vecteurs x' et t dans $F \setminus \{0\}$ tels que

$$f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x' \text{ et } f(\mathbb{K}(x-y)) = \mathbb{L}t.$$

Construire à l'aide de x' et t un vecteur $y' \in F$ tel que

$$f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y' \text{ et } f(\mathbb{K}(x-y)) = \mathbb{L}(x'-y').$$

20°) Pour tout $x, y \in E$ et $x' \in F$ tels que (x, y) est libre et $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$, montrer qu'il existe un unique $y' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$ et $f(\mathbb{K}(x-y)) = \mathbb{L}(x'-y')$.

Pour la suite de ce problème, lorsque $x, y \in E$ et $x' \in F$ avec (x, y) libre et $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$, on note $h(x, x', y)$ l'unique vecteur y' de F défini en question 19.

21°) Soit $x, y \in E$ tels que (x, y) est libre et soit $x', y' \in F$ tels que $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ et $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$. Montrer que $h(x, x', y) = y' \Longleftrightarrow h(y, y', x) = x'$.

22°) Soit (x, y, z) une famille libre de 3 vecteurs de E. En utilisant notamment la notion de dimension, montrer que
- $\mathbb{K}(y-z) = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x-y) + \mathbb{K}(x-z))$;
- $\mathbb{K}(x-y-z) = (\mathbb{K}(x-y) + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x-z) + \mathbb{K}y)$;
- $\mathbb{K}(y+z) = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x-y-z) + \mathbb{K}x)$.

23°) Soit (x, y, z) une famille libre de 3 vecteurs de E. Soit $x' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$. Montrer que si $y' = h(x, x', y)$ et $z' = h(x, x', z)$, alors $z' = h(y, y', z)$.

24°) Soit (x, y, z) une famille libre de 3 vecteurs de E. Soit $x' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$. Montrer que $h(x, x', y + z) = h(x, x', y) + h(x, x', z)$.

On admet que l'application h permet de construire une application g de E dans F vérifiant :

— Pour tout $x \in E$ avec $x \neq 0$, $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}g(x)$;
— pour tout $x, y \in E$, $g(x + y) = g(x) + g(y)$;
— g est bijective.

25°) Montrer qu'il existe un isomorphisme σ du corps $\mathbb{K}$ sur le corps $\mathbb{L}$ tel que g est σ-linéaire. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $f(A) = g(A)$.