

Résumé de cours :
Semaine 17, du 20 au 24 janvier.

Suites de vecteurs (fin)

1 Suites de Cauchy (hors programme)

On se place dans un espace métrique quelconque.

Définition. $[(x_n)]$ est une suite de Cauchy $\iff [\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{N} \forall p \geq N \forall q \geq N d(x_p, x_q) \leq \varepsilon]$.

Propriété. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Toute suite de Cauchy de E est bornée.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. E est un espace métrique complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Théorème. Si toute suite bornée de E possède au moins une valeur d'adhérence, alors E est complet.

Théorème. Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie est complet.

Séries de vecteurs

Notation. \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition. Un espace de Banach est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé complet.

Notation. On fixe dans ce chapitre un espace de Banach noté E .

2 Définition d'une série de vecteurs

Définition. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs. On appelle série de terme général a_n , et on note $\sum a_n$, la suite de terme général $(a_n, \sum_{k=0}^n a_k)$. Ainsi, $\sum a_n$ est une suite d'éléments de E^2 .

Remarque. L'intérêt de cette définition un peu formelle est de distinguer les séries de vecteurs des suites de vecteurs.

Propriété. L'ensemble des séries de vecteurs, noté $\mathcal{S}(E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

De plus, $\sum a_n + \alpha \sum b_n = \sum (a_n + \alpha b_n)$, lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont dans $\mathcal{S}(E)$ et lorsque $\alpha \in \mathbb{K}$.

Notation. $\sum_{k=0}^n a_k$ est appelée la somme partielle (des $n + 1$ premiers termes) de $\sum a_n$.

Propriété. Soit (A_n) une suite de vecteurs. Il existe une unique série $\sum a_n$ dont la suite des sommes partielles est (A_n) . Il s'agit de la série $\sum (A_n - A_{n-1})$, en convenant que $A_{-1} = 0$. Cette série est appelée la série télescopique associée à la suite (A_n) .

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $(a_n)_{n \geq n_0}$ une suite de vecteurs.

$\sum_{n \geq n_0} a_n$ est la série $\sum b_n$ où $b_n = 0$ si $n < n_0$ et $b_n = a_n$ si $n \geq n_0$.

On dit que $\sum_{n \geq n_0} a_n$ est une série tronquée à l'ordre n_0 .

3 Convergence d'une série de vecteurs

Définition. $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ converge.

Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$.

Propriété. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, les séries $\sum a_n$ et $\sum_{n \geq n_0} a_n$ sont de même nature et en cas de

convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Corollaire. On ne change pas la nature de la série $\sum a_n$ si l'on modifie un nombre fini d'éléments de la suite (a_n) .

Définition. Si $\sum a_n$ converge, son n -ième reste de Cauchy est $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. On a $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Propriété. Soit (u_n) une suite de vecteurs. La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (a_n + \lambda b_n)$ converge et

$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Ainsi, l'ensemble des séries convergentes de vecteurs est un sous-

espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$, noté $\mathcal{S}_{conv}(E)$ et l'application
$$\sum a_n \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
 est linéaire.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.

Remarque. On en déduit que, si la somme de deux séries est convergente, ces deux séries ont même nature. Cependant, il est possible qu'elles divergent toutes les deux. Par exemple, $\sum a_n + \sum (-a_n)$ converge, même lorsque $\sum a_n$ diverge.

Propriété. Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fautive.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Lorsque la suite a_n ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Propriété. La série géométrique $\sum a^n$ converge ssi $|a| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Propriété. Séries à valeurs dans un produit.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, \dots, E_p p espaces vectoriels normés. On note $E = E_1 \times \dots \times E_p$ que l'on munit de l'une des trois normes classiques.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_{1,n}, \dots, x_{p,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Alors la série $\sum x_n$ converge si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\sum x_{i,n}$ est convergente.

De plus, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{1,n}, \dots, \sum_{n=0}^{+\infty} x_{p,n} \right)$.

Propriété. Séries à valeurs dans un espace de dimension finie.

On suppose que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie dont $e = (e_1, \dots, e_q)$ est une base.

Soit (x_n) une suite de vecteurs de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \sum_{i=1}^q x_{i,n} e_i$.

Alors, la série $\sum x_n$ converge dans E si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, la série $\sum x_{i,n}$ converge

dans \mathbb{K} , et, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{i,n} \right) e_i$.

Propriété. Soit $\sum a_n$ une série de complexes. Elle converge si et seulement si les séries $\sum \operatorname{Re}(a_n)$ et

$\sum \operatorname{Im}(a_n)$ convergent, et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(a_n)$.

4 Convergence absolue

Définition. $\sum a_n \in \mathcal{S}(E)$ vérifie le critère de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \left\| \sum_{k=1}^p a_{n+k} \right\| \leq \varepsilon.$$

Propriété. $\sum a_n$ converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum \|a_n\|$ est convergente.

Propriété. Soit $\sum a_n \in \mathcal{S}(E)$. Si $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle converge

et $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|$ (Inégalité triangulaire). La réciproque est fautive.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. $\sum a_n$ est semi-convergente ssi elle converge sans être absolument convergente.

5 Séries à termes positifs

5.1 Théorèmes généraux

Théorème. Soit $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$. Alors $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes

partielles est majorée, et dans ce cas, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Lorsque $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ diverge, on peut écrire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Propriété. Soient $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq b_n$.

Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Si $\sum a_n$ est divergente, alors $\sum b_n$ diverge.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Lorsque $\sum a_n$ une série de complexes absolument convergente, on peut montrer qu'elle est convergente de manière élémentaire, sans utiliser la notion hors programme de suite de Cauchy.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On note $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{ converge} \}$ et pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$, posons $\|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Alors $(l^1(\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On note $l^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 \text{ converge} \}$ et pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$, posons $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2}$. Alors $(l^2(\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé E .

- $a_n = O(b_n) \iff \exists C \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|a_n\| \leq C \|b_n\|$.
- $a_n = o(b_n) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|a_n\| \leq \varepsilon \|b_n\|$.
- $a_n \sim b_n \iff a_n - b_n = o(b_n)$.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{C}$, si pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$, alors

- $a_n = O(b_n) \iff \frac{a_n}{b_n}$ est bornée ;
- $a_n = o(b_n) \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et
- $a_n \sim b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On montrera plus tard le théorème suivant, dont l'énoncé peut être utilisé dès maintenant.

On dit que la suite a_n est négligeable devant la suite b_n si et seulement si $a_n = o(b_n)$.

De même, on dit que la fonction $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ lorsque x est au voisinage de a si et seulement si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a , c'est-à-dire, en supposant que l'on peut diviser, si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Théorème des croissances comparées : Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $a > 1$.

1. Les suites $\ln^\alpha(n), n^\beta, a^n$ et $n!$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $\ln^\alpha x, x^\beta$ et $e^{\gamma x}$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de 0^+ , $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.
4. Au voisinage de $-\infty$, $e^{\gamma x} = o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$.

Propriété. Soit $\sum a_n$ une série de vecteurs et $\sum b_n$ une série de réels positifs.

On suppose que $\|a_n\| = \mathbf{O}(b_n)$.

Si la série $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ est absolument convergente.

Si la série $\sum \|a_n\|$ diverge, alors $\sum b_n$ est divergente.

Remarque. En pratique, on utilise souvent ce théorème lorsque $a_n = o(b_n)$.

Théorème. Soient $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ telles que $a_n \sim b_n$. Alors les deux séries ont la même nature.

Théorème. Soit $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que b_n est positif à partir d'un certain rang ou bien que b_n est négatif à partir d'un certain rang. Si $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

méthode : pour étudier la nature d'une série, on commence par rechercher un équivalent de son terme général.

5.2 Séries de Riemann

Technique de comparaison entre séries et intégrales (TCSI) : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application décroissante et continue. La TCSI consiste en la présentation des trois étapes suivantes :

Première étape : Soit $k > n_0$. f étant décroissante, pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$.

Deuxième étape : En intégrant, on obtient $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$.

Troisième étape : Soit $n > n_0$: en sommant, $\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$.

Il faut savoir présenter cette technique.

Théorème de comparaison entre séries et intégrales : Sous les mêmes notations et hypothèses, la série $\sum f(n)$ a même nature que la suite $\left(\int_{n_0}^n f(t) dt\right)_{n \geq n_0}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Il faut savoir le démontrer.

Critère de Riemann : Soient $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\sum a_n$ converge.

S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\sum a_n$ diverge.