

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 16 : du lundi 3 au vendredi 7 février

**Liste des questions de cours**

- 1°) Si une série converge, montrer que son terme général tend vers 0. La réciproque est-elle vraie?
- 2°) Nature de  $\sum a^n$  où  $a \in \mathbb{C}$  et valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$  en cas de convergence. Justifier.
- 3°) Montrer que l'absolue convergence implique la convergence dans un Banach.
- 4°) Présenter la technique de comparaison entre séries et intégrales. En déduire le théorème du même nom.
- 5°) Etablir la nature des séries de Riemann.
- 6°) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{(n^\alpha)}$ .
- 7°) Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .
- 8°) Déterminer la nature des séries de Bertrand.
- 9°) Énoncer et démontrer le critère de D'Alembert.

**Thèmes de la semaine**

**Suites de vecteurs**

Cf le précédent programme de colles.

**Séries de vecteurs (sauf séries alternées)**

Les élèves doivent savoir faire des calculs asymptotiques simples. Cependant, le cours sur les  $o$ ,  $O$ , équivalents et développements limités n'a pas encore été étudié. Aucune aisance technique n'est donc attendue.

**Notation.**  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$E$  est un espace de Banach, c'est-à-dire un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé complet.

## 1 Définitions

Définition de la série formelle  $\sum a_n$ . Sommes partielles d'une série.

L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des séries de vecteurs de  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Si  $(A_n)$  est une suite de vecteurs, la série télescopique  $\sum(A_n - A_{n-1})$  est l'unique série dont la suite des sommes partielles est  $(A_n)$ .

Série tronquée  $\sum_{n \geq n_0} a_n$ .

## 2 Convergence d'une série de vecteurs

$\sum a_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  sont de même nature.

La série télescopique  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge.

Si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent,  $\sum(a_n + \lambda b_n)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .

**Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fautive.**

Lorsque  $a_n$  ne tend pas vers 0, on dit que  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

**Définition.** Si  $\sum a_n$  converge, son  $n$ -ième reste de Cauchy est  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ . On a  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Une série à valeurs dans un produit de  $p$  espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses séries composantes sont convergentes.

Une série à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie converge si et seulement si ses séries coordonnées sont convergentes.

Une série  $\sum a_n$  de complexes converge si et seulement si  $\sum \operatorname{Re}(a_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(a_n)$  convergent,

et dans ce cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(a_n)$ .

## 3 Convergence absolue

Critère de Cauchy, séries absolument convergentes.

L'absolue convergence implique la convergence (car  $E$  est de Banach).

Séries semi-convergentes.

## 4 Séries de réels positifs

### 4.1 Théorèmes généraux

$\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$  converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si  $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq a_n \leq b_n$  et  $\sum b_n$  converge, alors  $\sum a_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .

Si  $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$  avec  $a_n = O(b_n)$  et si  $\sum b_n$  converge, alors  $\sum a_n$  converge.

**Théorème.** Soit  $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  avec  $b_n$  de signe constant à partir d'un certain rang.

Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  ont la même nature.

Les espaces vectoriels normés  $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{ converge} \}$

et  $l^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 \text{ converge} \}$ .

**Méthode par défaut pour étudier la nature d'une série  $\sum a_n$  :** rechercher un équivalent de  $a_n$ .

## 4.2 Séries de Riemann

Technique de **comparaison entre séries et intégrales** (TCSI).

Théorème de comparaison entre séries et intégrales : lorsque  $f$  est continue positive et décroissante, la série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  a même nature que la suite  $\left( \int_{n_0}^n f(t) dt \right)_{n \geq n_0}$ .

La **série de Riemann**  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

Critère de Riemann (étude de  $n^\alpha a_n$ ).

Constante d'Euler :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

Séries de Bertrand (hors programme : à savoir établir lorsque c'est nécessaire dans un exercice).

**Critère de D'Alembert.**

Formule de Stirling :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ .

## Prévisions pour la semaine prochaine :

Séries alternées.