DM 33 : Calculs de sommes de séries

On rappelle que, lorsque n et k sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de parties de $\{1, \ldots, n\}$ possédant k éléments.

Dans tout ce problème, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de complexes.
On lui associe la suite $a^* = (a^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^*_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

L'objet des parties I à III est de comparer les propriétés des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a^*_n$.
Les parties IV et V s'intéressent à des séries entières.

Partie I : deux exemples.

1°) Cas d'une suite constante : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha$.
Déterminer les natures des séries $\sum a_n$ et $\sum a^*_n$.

2°) Cas d'une suite géométrique : Soit $z \in \mathbb{C}$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

- Préciser en fonction de z les natures des séries $\sum a_n$ et $\sum a^*_n$ et, en cas de convergence, calculer leurs sommes.
- La convergence de $\sum a^*_n$ implique-t-elle celle de $\sum a_n$?
- La convergence de $\sum a_n$ implique-t-elle celle de $\sum a^*_n$?
- Lorsque $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, calculer les parties réelles et imaginaires de $\sum_{n=0}^{+\infty} a^*_n$.

Partie II : Comparaison entre (a_n) et (a^*_n).

3°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

— Quel résultat du cours permet d'affirmer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$?

— Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|a_n^*| \leq \dfrac{M}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} + \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=N}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{\varepsilon}{2}$.

— En déduire que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5°) Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que a_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.
Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

6°) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

Partie III : Comparaison entre $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^*$.

7°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$.

8°) On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie IV : Rayon de convergence d'une série entière.

La série entière associée à la suite (a_n) est l'application $z \longmapsto \sum a_n z^n$, de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des séries de complexes.

9°) Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

On note A l'ensemble des $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée.
On pose $R = \sup(A)$ avec $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

10°) Soit $z \in \mathbb{C}$.
Lorsque $|z| < R$, montrer que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Lorsque $|z| > R$, montrer que la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

11°) Montrer qu'il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge.
On dit que R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

12°) On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$.
On suppose également qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{\ell}$ en convenant que $\frac{1}{+\infty} = 0$ et que $\frac{1}{0} = +\infty$.

13°) Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum z^n$ et $\displaystyle\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$.

Pour toute la suite de ce problème, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En particulier, $\sigma_0 = 0$.

14°) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sigma_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

15°) Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$ et $\sum \sigma_n z^n$.

Partie V : Exemples d'études de séries entières

Lorsque $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R avec $0 < R \leq +\infty$, on admettra que l'application $t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R, R[$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]-R, R[$, $\displaystyle\frac{d^p}{dt^p}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^p}{dt^p}(a_n t^n)$.
On admettra également que pour tout $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\Big)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_0^x a_n t^n \, dt\Big)$.

16°) Avec ces notations, on suppose que $R > 0$
et on pose $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $h^{(n)}(0)$ en fonction de a_n.
Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \;,\; g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n.$$

17°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x)$.

18°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$.

Déterminer une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

19°) Exprimer $g' - g$ en fonction de f.
En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x F(x)$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

20°) Préciser l'ensemble de définition de la fonction ϕ, que l'on notera $\mathcal{D}_\phi$.
Étudier les variations de ϕ sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathcal{D}_\phi$.

21°) À l'aide de la partie III, calculer $\phi(\frac{1}{2})$.