

# Feuille d'exercices 15.

## Topologie

**Exercice 15.1 :** (niveau 1)

Montrer que  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ln(x^2 + y^2 + 1) \sin(z) < e^{x+z} \text{ et } x + y - z > 1\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 15.2 :** (niveau 1)

Montrer que  $\{x + iy \in \mathbb{C} / x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 3, x^3 + y^3 - 3xy \geq 0\}$  est un compact de  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 15.3 :** (niveau 2)

Si  $F$  est un fermé d'un espace métrique, montrer qu'il existe une suite décroissante d'ouverts  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ .

**Exercice 15.4 :** (niveau 2)

On note  $E = l^\infty(\mathbb{R})$  et  $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ .  $F$  est-il un ouvert ou un fermé de  $E$  ?

**Exercice 15.5 :** (niveau 2)

Soit  $X$  un espace métrique compact.

Montrer que  $X$  possède une partie dense et dénombrable.

**Exercice 15.6 :** (niveau 2)

Soit  $A$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé  $E$ .

On note  $\delta(A)$  le diamètre de  $A$ .

Montrer que  $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ . A-t-on  $\delta(A) = \delta(\overset{\circ}{A})$  ?

**Exercice 15.7 :** (niveau 2)

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$  tel que  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ . Montrer que  $F = E$ .

**Exercice 15.8 :** (niveau 2)

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $F$  est un fermé de  $E$ .

1°) Soit  $K$  une partie compacte de  $E$ .

Montrer que  $F + K = \{f + k / (f, k) \in F \times K\}$  est fermé.

2°) On pose  $F = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$  et  $K = \{(x, e^x) / x \in \mathbb{R}\}$ . Montrer que  $F$  et  $K$  sont deux fermés de  $\mathbb{R}^2$  mais que  $F + K$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

---

**Exercice 15.9** : (niveau 2)

Soit  $A$  et  $B$  deux ouverts d'un espace vectoriel normé  $E$ .  
Montrer que  $A + B$  est ouvert. Est-ce vrai avec des fermés ?

**Exercice 15.10** : (niveau 2)

Soit  $A$  une partie d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $\overline{A}$  est compact si et seulement si toute suite d'éléments de  $A$  admet une valeur d'adhérence **dans**  $E$ .

**Exercice 15.11** : (niveau 2)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $P$  une partie de  $E$ .  
On dit que  $P$  est discrète si et seulement si tous les points de  $P$  sont des points isolés de  $P$ .  
La réunion de deux parties discrètes est-elle toujours discrète ?  
Montrer que la réunion de deux parties discrètes et fermées est discrète et fermée.

**Exercice 15.12** : (niveau 2)

Soit  $A$  une partie convexe d'un espace vectoriel normé  $E$ .  
Montrer que  $\overset{\circ}{A}$  et  $\overline{A}$  sont aussi convexes.

**Exercice 15.13** : (niveau 3)

*Théorème du point fixe.* Soit  $A$  une partie complète non vide d'un espace métrique  $E$  et  $f : A \rightarrow A$  une application  $k$ -contractante où  $k \in [0, 1[$ .

1°) Montrer qu'il existe au plus un vecteur  $l \in E$  tel que  $f(l) = l$  (on dit que  $l$  est un point fixe de  $f$ ).

2°) Soit  $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_{n+1} = f(x_n)$ , avec  $x_0 \in A$ .

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$ .

b) Montrer que  $(x_n)$  converge et que sa limite est un point fixe de  $f$ .

**Exercice 15.14** : (niveau 3)

On note  $E$  l'ensemble des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , que l'on munit de la norme infinie (norme de la convergence uniforme).

1°) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$P_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Déterminer la limite de la suite  $(P_n)$  d'éléments de  $E$ .

2°) On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des applications polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que  $\mathcal{P}$  n'est pas complet.

3°) Montrer que  $(E, \|\cdot\|_{\infty})$  est un espace complet.

---

**Exercice 15.15** : (niveau 3)

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ . On considère la relation  $\mathcal{U}$  sur  $U$  définie par :

$$\forall x, y \in U, (x \mathcal{U} y) \iff ([x, y] \subset U),$$

où  $[x, y]$  désigne le segment joignant  $x$  à  $y$  même lorsque  $x > y$ .

1°) Démontrer que  $\mathcal{U}$  est une relation d'équivalence sur  $U$ .

2°) Démontrer que les classes d'équivalence de  $U$  sont des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ . Justifier que l'ensemble quotient  $U/\mathcal{U}$  est dénombrable.

3°) Qu'a-t-on ainsi démontré ?

**Exercice 15.16** : (niveau 3)

$l^\infty(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des suites bornées de réels ; c'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme infinie.

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des fermés de  $l^\infty(\mathbb{R})$  :

- ◇ l'ensemble des suites croissantes bornées,
- ◇ l'ensemble des suites bornées admettant 0 pour valeur d'adhérence,
- ◇ l'ensemble  $\mathcal{P}_T$  des suites  $T$ -périodiques, où  $T \in \mathbb{N}^*$ ,
- ◇ la réunion  $\bigcup_{T \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_T$ .

---

## Exercices supplémentaires :

**Exercice 15.17** : (niveau 1)

Si  $A$  est dense dans  $B$  et si  $B$  est dense dans  $C$ , montrer que  $A$  est dense dans  $C$ .

**Exercice 15.18** : (niveau 2)

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  (où  $E$  est un espace vectoriel normé). Si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $B(A, \alpha) = \{x \in E / d(x, A) < \alpha\}$ .

1°) Montrer que  $B(A, \alpha) = \bigcup_{x \in A} B_o(x, \alpha)$ .

2°) Montrer que  $\bar{A} = \bigcap_{\alpha > 0} B(A, \alpha)$ .

3°) En déduire que  $\bar{A}$  est une intersection dénombrable d'ouverts.

**Exercice 15.19** : (niveau 2)

On suppose que  $A$  est une partie dense de  $B$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_p$   $p$  éléments de  $A$ .

Montrer que  $A \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$  est dense dans  $B \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ .

**Exercice 15.20** : (niveau 2)

Montrez que si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé,

alors  $\overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = \emptyset$ .

**Exercice 15.21** : (niveau 2)

On se place dans un espace vectoriel normé noté  $E$ . Soit  $P$  une partie de  $E$ .

On dit que  $P$  est discrète si et seulement si tous ses points sont des points isolés de  $P$ .

Montrer qu'une partie  $P$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est discrète et fermée si et seulement si il n'existe aucun point d'accumulation de  $P$ .

**Exercice 15.22** : (niveau 2)

$A$  est un ouvert d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

1°) Montrer que  $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$ .

2°) Montrer que  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$ .

3°) Si  $B$  est dense dans  $E$ , montrer que  $\overline{A \cap B} = \bar{A}$ .

4°) Si  $A$  et  $B$  sont denses dans  $E$ , montrer que  $A \cap B$  est dense dans  $E$ .

5°) Donner un exemple de parties denses dont l'intersection n'est pas dense.

**Exercice 15.23** : (niveau 2)

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, où  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ . On suppose que  $A$  est ouvert. Montrer que  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

**Exercice 15.24** : (niveau 2)

On dit qu'un point  $a$  d'une partie  $A$  est isolé dans  $A$  si et seulement si il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $V \cap A = \{a\}$ .

---

Soit  $A$  une partie sans point isolé. Soit  $B$  une partie dense dans  $A$ . Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $b_1, \dots, b_p$   $p$  éléments de  $B$ . Montrer que  $B \setminus \{b_1, \dots, b_p\}$  est dense dans  $A$ .

**Exercice 15.25** : (niveau 2)

On dit qu'un point  $a$  d'une partie  $A$  est isolé dans  $A$  si et seulement si il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $V \cap A = \{a\}$ .

Soit  $A$  une partie sans point isolé. Soit  $B$  une partie dense dans  $A$ . Montrer que pour tout  $a \in A$  et pour tout voisinage  $V$  de  $a$ ,  $V \cap B$  est infini.

**Exercice 15.26** : (niveau 2)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $l \in E$  est un point d'accumulation de  $A$  si et seulement si  $l \in \overline{A \setminus \{l\}}$ .

Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de  $A$  est un fermé.

**Exercice 15.27** : (niveau 2)

On munit  $C([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme de la convergence en moyenne.

1°) Pour tout entier  $n \geq 3$ , on note  $f_n$  l'élément de  $E$  défini par les relations suivantes.  $f_n(t) = 0$  lorsque  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $f_n(t) = n(t - \frac{1}{2})$  lorsque  $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$  et  $f_n(t) = 1$  lorsque  $t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ .

Montrer que  $f_n$  est une suite de Cauchy de  $E$ .

2°) Montrer que  $E$  n'est pas un espace de Banach.

**Exercice 15.28** : (niveau 2)

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un espace vectoriel normé  $E$ .

Montrer que  $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ .

**Exercice 15.29** : (niveau 2)

Pour quels réels  $\alpha$  l'ensemble  $\{m^{\alpha \operatorname{argsh}(n)} / m, n \in \mathbb{N}^*\}$  est-il dense dans  $\mathbb{R}_+$  ?

**Exercice 15.30** : (niveau 3) Montrer que  $l^1(\mathbb{C})$  est un espace de Banach.

**Exercice 15.31** : (niveau 3) On note  $E = l^1(\mathbb{C}) = \{(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| < +\infty\}$  et on note  $A$  l'ensemble des suites géométriques  $(u_n)$  de  $E$  telles que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$ .

$A$  est-il fermé?  $A$  est-il ouvert?

**Exercice 15.32** : (niveau 3) Soit  $S$  un ensemble non dénombrable de réels.

1°) Montrer que  $S$  admet au moins un point d'accumulation  $\ell$ , ce qui signifie que  $\ell \in \overline{S \setminus \{\ell\}}$ .

2°) Montrer que  $S$  possède au moins un ensemble dénombrable de points d'accumulation.

3°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation est un fermé.

4°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de  $S$  n'est pas dénombrable.