DM 33 : Un corrigé

Partie I : deux exemples.

1°) Cas d'une suite constante :
Si $\alpha = 0$, alors les suites (a_n) et (a_n^*) sont identiquement nulles, donc les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont convergentes.
Supposons maintenant que $\alpha \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de Newton, $a_n^* = \dfrac{\alpha}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \dfrac{\alpha}{2^n}(1+1)^n = \alpha$.
En particulier, les suites (a_n) et (a_n^*) ne convergent pas vers 0, donc les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2°) Cas d'une suite géométrique :
$\diamond$ D'après le cours, la série géométrique $\sum a_n = \sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-z}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton,
$a_n^* = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^n = \dfrac{(1+z)^n}{2^n}$. Ainsi, (a_n^*) est aussi une suite géométrique, mais sa raison est égale à $\dfrac{1+z}{2}$. La série $\sum a_n^*$ est donc convergente si et seulement si $|1+z| < 2$, c'est-à-dire si et seulement si le complexe z est dans la boule ouverte de centre -1 et de rayon 2. Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{1+z}{2}}$, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1-z}}$.
$\diamond$ $\sum a_n^*$ converge si et seulement si $z \in B_o(-1,2)$ (boule ouverte de centre -1 et de rayon 2) et $\sum a_n$ converge si et seulement si $z \in B_o(0,1)$. Si l'on représente ces deux domaines dans le plan complexe, on voit que $B_o(0,1) \subset B_o(-1,2)$. On peut le démontrer directement : si $z \in B_o(0,1)$, alors $|z+1| \leq |z|+1 < 2$, donc $z \in B_o(-1,2)$.
On en déduit déjà que la convergence de $\sum a_n$ implique celle de $\sum a_n^*$.
De plus, lorsque $z = -2$, $z \in B_o(-1,2) \setminus B_o(0,1)$, donc $\displaystyle\sum a_n^*$ converge et $\sum a_n$ diverge.
Ainsi, la convergence de $\sum a_n^*$ n'implique pas celle de $\sum a_n$.
$\diamond$ On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $z \in \mathbb{U}$, or on voit sur une figure que $\mathbb{U} \cap B_o(-1,2) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$, donc $\sum a_n^*$ converge si et seulement si $e^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On peut le démontrer

directement, car $|1+e^{i\theta}| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2|\cos(\frac{\theta}{2})|$, donc $e^{i\theta} \in B_o(-1,2)$, sauf lorsque $2|\cos(\frac{\theta}{2})| = 2$, c'est-à-dire lorsque $\frac{\theta}{2} \in \pi\mathbb{Z}$. Pour la suite, on suppose donc que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}2i\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{i}{\sin(\frac{\theta}{2})}e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\Big) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\Big) = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}}.$$

Partie II : Comparaison entre (a_n) et (a_n^*).

3°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Lorsque $n \geq k$, $\displaystyle\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2^n\ k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{2^n\ k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

car d'après les croissances comparées, $\displaystyle\frac{n^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°)

- La suite (a_n) est convergente, donc elle est bornée.
  Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.
- <u>Soit $\varepsilon > 0$</u>. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Alors, par inégalité triangulaire
  $$\begin{aligned} |a_n^*| = \Big|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\Big| &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}|a_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}|a_k| \\ &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}M + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$
- Poursuivons : on en déduit que $\displaystyle|a_n^*| \leq \frac{M}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} = b_n + \frac{\varepsilon}{2}$,

  par la formule du binôme de Newton, en posant $\displaystyle b_n = \frac{M}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}$.

  Or d'après la question précédente, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N'$, $b_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

  Posons <u>$P = \max(N, N')$</u> et <u>soit $n \geq P$</u>. Alors <u>$|a_n^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$</u>.

  Ceci démontre que $a_n^* \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \ell$. Alors $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après la question précédente, on a $b_n^* \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où $\displaystyle b_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell) = a_n^* - \ell$.

Ceci démontre bien que $a_n^* \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

6°) D'après la question 2, lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$, où $z \in \mathbb{C}$, on a $a_n^* = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n$. En particulier lorsque $z = -2$, la suite géométrique (a_n) ne converge pas (car $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) alors que $a_n^* = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, en général, la convergence de la suite (a_n) n'est pas équivalente à la convergence de la suite (a_n^*).

Partie III : Comparaison entre $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.

7°) On procède par récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$.
Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $T_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$.
Lorsque $n = 0$, on calcule $T_0 = a_0^* = a_0$ et $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k = S_0 = a_0$, d'où $R(0)$.
On suppose maintenant que $R(n)$ est vraie.
Alors $T_{n+1} = T_n + a_{n+1}^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k$.
Dans la seconde somme, on pratique une transformation d'Abel :
en convenant que $S_{-1} = 0$,
$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=-1}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$,
donc $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right)S_k + S_{n+1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}2^{n+1}T_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right)S_k + S_{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}\right)S_k + S_{n+1},\end{aligned}$$

donc d'après la formule de Pascal, $2^{n+1}T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+1}S_k + S_{n+1}$, d'où l'on déduit $T_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}S_k$, ce qui prouve $R(n+1)$ si l'on suppose $R(n)$.
Le principe de récurrence permet de conclure.

8°) Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Ainsi, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_{k-1}$, donc si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$S'_n = S_{n-1}$, en convenant toujours que $S_{-1} = 0$, on obtient $T_n = 2\dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k$.
Or $S'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, donc en appliquant la question 5 en remplacant (a_n) par (S'_n), on obtient que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2S$. Ceci montre que la série $\sum a_n^*$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie IV : Rayon de convergence d'une série entière.

9°) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n\rho^n| \leq M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = |a_n\rho^n|\left|\dfrac{z}{\rho}\right|^n \leq Mr^n$, où $r = \left|\dfrac{z}{\rho}\right| \in [0, 1[$. La série géométrique $\sum r^n$ est convergente, donc d'après le cours, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

10°) $\diamond$ $0 \in A$, donc A est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Elle possède donc bien une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
$\diamond$ Supposons que $|z| < R$.
Alors $|z|$ n'est pas un majorant de A, donc il existe $\rho \in A$ tel que $|z| < \rho$.
Ceci impose $\rho > 0$, donc d'après la question précédente, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
$\diamond$ Supposons que $|z| > R$. Alors $|z| \notin A$, donc la suite $(a_n|z|^n)$ n'est pas bornée, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = |a_n|z|^n|$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

11°) L'existence découle de la question précédente. Il reste à montrer l'unicité.
Soit $S \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que pour tout complexe z, si $|z| < S$, $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > S$, $\sum a_n z^n$ diverge.
Si $S < R$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $S < T < R$. Alors $\sum a_n T^n$ est à la fois convergente et divergente, ce qui est faux. On raisonne de même si $R < S$, donc $S = R$.

12°) $\diamond$ Supposons d'abord que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$\dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l|z|$, donc d'après le critère de d'Alembert, lorsque $|z| < \frac{1}{l}$, $l|z| < 1$ et $\sum a_n z^n$ converge (et c'est encore vrai lorsque $z = 0$), et de même, lorsque $|z| > \frac{1}{l}$, $l|z| > 1$ et $\sum a_n z^n$ diverge. Ainsi, d'après la définition du rayon de convergence, ce dernier est bien égal dans ce cas à $\frac{1}{\ell}$.
$\diamond$ Supposons que $\ell = 0$. Alors le calcul précédent montre que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n z^n$ converge. Dans ce cas, le rayon de convergence est bien égal à $+\infty = \frac{1}{0}$.
$\diamond$ Supposons enfin que $\ell = +\infty$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sum a_n z^n$ diverge. Dans ce cas, le rayon de convergence est bien égal à $0 = \frac{1}{+\infty}$.

13°) $\diamond$ Pour la première série entière, $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer la question précédente avec $\ell = 1$: le rayon de convergence de $\sum z^n$ est égal à 1.

$\diamond$ Pour la seconde série entière, $a_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après la question précédente, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$ est égal à $+\infty$.

14°) $\diamond$ Posons $x_n = \sigma_n - \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc d'après le cours, la série $\sum(x_n - x_{n-1})$ est aussi convergente, mais cette dernière série est télescopique, donc la suite (x_n) est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème des séries alternées spéciales, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est bien convergente. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est donc la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, or $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(2k-1)-1}}{2k-1}$, donc

$S_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\Big) = \sigma_{2n} - \sigma_n$. Alors d'après le point précédent, $S_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$, ce qui prouve que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$. On a donc montré que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$.

15°) En particulier, $\sigma_n \sim \ln n$, donc lorsque $n \geq 1$, en posant $a_n = \dfrac{\sigma_n}{n!}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \sim \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \dfrac{1}{n+1}$. Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln n + o(1) \sim \ln n$, donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$ est $+\infty$.

$\diamond$ $\dfrac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \sim \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim 1$, donc le rayon de convergence de $\sum \sigma_n z^n$ est égal à 1.

Partie V : Exemples d'études de séries entières

16°) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'introduction de cette partie, h est n fois dérivable sur $]-R, R[$, et pour tout $x \in]-R, R[$,

$h^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}(a_p x^p) = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p p(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$, donc pour $x = 0$, on obtient $\boxed{h^{(n)}(0) = n! a_n}$.

17°) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 13, $f(x)$ est bien défini. De plus, $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc par décalage d'indice (que l'on peut justifier en passant aux sommes partielles), $xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, or d'après le cours $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $xf(x) = e^x - 1$. Ainsi, lorsque $x \neq 0$, $\boxed{f(x) = \frac{e^x - 1}{x}}$ et $f(0) = 1$.

18°) Lorsque $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x}f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n!}$, donc par décalage d'indice, $e^{-x}f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$. Cette égalité est encore vraie lorsque $x = 0$, car $f(0) = 1$.
Cette nouvelle série entière converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc son rayon de convergence est infini. Alors, d'après l'introduction de cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}$. Un dernier décalage d'indice donne alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n)!n}}$.

Ainsi, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!n}}$.

19°) $\diamond$ D'après la question 15, le rayon de convergence de $\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$ vaut $+\infty$, donc d'après les résultats admis par l'énoncé en début de partie, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, g' est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, toujours d'après les résultats admis en début de partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sigma_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{n+1} x^n}{n!}$, donc $g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$. Ainsi, $\boxed{g' - g = f}$.
$\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $h(x) = e^{-x}g(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) = e^{-x}f(x) = F'(x)$, donc il existe D tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) + D$. Or, en $x = 0$, $h(0) = g(0) = \sigma_0 = 0$ et $F(0) = 0$, donc $D = 0$. Ainsi, $h = F$, ce qui prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x F(x)$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 16, $g^{(n)}(0) = \sigma_n$. Par ailleurs, d'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{d^p}{dx^p}(F(x)) \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}(e^x)$,
or toujours d'après la question 15 et d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$F^{(p)}(0) = p!b_p = \dfrac{(-1)^{p-1}}{p}$ et $F(0) = 0$. Ainsi, $g^{(n)}(0) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$.

On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

20°) $\diamond$ Notons $\mathcal{D}_\phi$ le domaine de définition de ϕ. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_\phi$ si et seulement si la série $\sum \sigma_n x^n$ est convergente.
D'après la question 15, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\phi \subset [-1,1]$.
De plus, $\sigma_n \sim \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\sum \sigma_n$ et $\sum(-1)^n \sigma_n$ divergent grossièrement donc $\boxed{\mathcal{D}_\phi =]-1,1[}$.

$\diamond$ D'après l'introduction de cette partie, pour tout $x \in [0,1[$, $\phi'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sigma_n x^{n-1} \geq 0$ donc ϕ est croissante sur $[0,1[$.

21°) Si on pose $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $k \geq 1$ et $a_0 = 0$, on a d'après la question 19 : $\dfrac{\sigma_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_n^*$.

De plus d'après la question 14, $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$. Alors d'après la question 8, $\sum a_n^*$ est également convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. On en déduit que

$$\boxed{\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2\ln(2)}\ .$$