Commentaires pour la pré-correction du DM 33

Merci de pré-corriger votre devoir, en tenant compte des commentaires qui suivent et en vous référant au corrigé type présent sur le site. Je vous demande ensuite de le scanner page à page, dans le bon sens et de le déposer sur mon site au format .pdf.

Le sujet utilise des complexes, or sur $\mathbb{C}$, aucune relation d'ordre n'est compatible avec la somme et le produit, donc lorsque $a, b \in \mathbb{C}$, l'écriture "$a \leq b$" n'a pas de sens.

— **Question 1 :** Ne pas oublier le cas particulier $\alpha = 0$, qui se comporte différemment du cas général.

— **Question 2 :** Le cours hors programme, ici la règle d'Abel ou le critère de Cauchy, doit être redémontré avant d'être utilisé, surtout à l'écrit. Pour cette question, on peut se limiter au cours au programme sur les séries géométriques.

— **Question 4 :** Attention, lorsque $n \neq N-1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} \neq 2^{N-1}$.

— **Question 5 :** Il est plus rapide ici d'utiliser les questions précédentes plutôt que de les adapter.

— **Question 9 :** Le plus rapide est de majorer $|a_n z^n|$ par le terme général d'une série convergente à termes positifs. On peut, même si c'est plus long, majorer les sommes partielles de la série $\sum |a_n z^n|$, puisque c'est une série à termes positifs.

Cependant, si vous montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \leq \frac{M}{1-|\frac{z}{\rho}|}$, avec M indépendant de n, cela prouve que les sommes partielles de la série $\sum a_n z^n$ sont bornées, mais pas du tout qu'elles convergent, car on n'est plus dans le cadre des séries à termes positifs.

— **Question 14 :** La question précédente permet d'établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Pour en déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, il faut de plus, ou bien démontrer que la série est bien convergente, ou bien prouver qu'on a aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

— **Question 15 :** L'affirmation "$\displaystyle\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$" doit être démontrée.