

## DM 37 : énoncé

Ce sujet est à chercher après avoir finalisé et rendu le DM 35.  
Il est à rendre pré-corrigé le mercredi de la rentrée, 5 mars 2025.

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On fixe  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on note,  $\forall n \geq n_0$ ,  $P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k$ .

Si la suite  $(P_n)_{n \geq n_0}$  converge, on notera  $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$  sa limite et on dira que le produit

$\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$  existe.

### Première partie :

Dans cette partie  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

1) On suppose que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ . Montrer que le produit  $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$  existe.

2) Calculer  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  et  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ .

3) a) Vérifier que,  $\forall t \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = 1 + \frac{1}{\text{ch}t}$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$  avec  $x > 1$ . On note  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$v_1 = x \text{ et, } \forall n \geq 1, v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

Montrer qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $v_1 = \text{ch}\theta$ .

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$

Montrer l'existence et donner la valeur de  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{v_n}\right)$ , d'abord en fonction de  $\theta$ , puis en fonction de  $x$ .

4) On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| < 1$  et que la série  $\sum u_n$  converge.

a) Dans cette question, on suppose que  $\sum u_n^2$  converge.

Montrer que la série  $\sum (\ln(1 + u_n) - u_n)$  converge.

En déduire que  $\ln \left( \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right)$  converge lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

Montrer que  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$  existe et qu'il appartient à  $\mathbb{R}_+^*$ .

b) Dans cette question, on suppose que  $\sum u_n^2$  diverge.

Montrer que  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$  existe et qu'il vaut 0.

c) Calculer  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)$  et  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$ .

## Seconde partie :

1) a) Montrer que, pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ .

b) Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}$ .

c) En déduire que, pour tout  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ , le quotient

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt} \text{ tend vers } 0.$$

Soit  $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que  $\varphi(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ .

d) On rappelle que la continuité de  $\varphi$  en  $\frac{\pi}{2}$  est équivalente à la phrase suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \forall x \in \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \right], \left| \varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Montrer que, lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) (\sin t)^{2n} dt \sim \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt.$$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$ .

a) Pour  $n \geq 1$ , montrer que  $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$ .

b) Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$  puis montrer que lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$I_n \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

**3 a)** Calculer la limite de la suite  $\left( \int_0^{p\pi} e^{-2t} dt \right)_{p \in \mathbb{N}}$ .

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la suite  $\left( \int_0^{p\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt \right)_{p \in \mathbb{N}}$  est convergente. On notera  $u_n$  la limite de cette suite.

c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt = e^{-2k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) (\sin t)^{2n} dt$ , où  $\varphi$  est une application indépendante de  $n$  que l'on précisera.

d) En déduire que lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$u_n \sim \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

**4 a)** Pour tout  $n \geq 1$ , montrer que  $u_n = n \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} e^{-2t} (\cos t) (\sin t)^{2n-1} dt$ .

b) En déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $n(2n-1)u_{n-1} = 2(1+n^2)u_n$ .

c) Montrer que  $u_n = \frac{(n!)^2 I_n}{\pi \prod_{k=1}^n (1+k^2)}$ .

d) En déduire que  $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$  existe et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}.$$

### Troisième partie :

Dans cette partie  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

1) Montrer que  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|$  existe et donner sa valeur.

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $n$  nombres complexes  $z_1, \dots, z_n$ .

Montrer par récurrence que  $\left| -1 + \prod_{k=1}^n (1 + z_k) \right| \leq -1 + \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|)$  : on commencera par l'établir pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

3) Lorsque  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de complexes, on dit que c'est une suite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall q \in \mathbb{N} |z_{n+q} - z_n| \leq \varepsilon.$$

On admettra qu'une suite de complexes est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de complexes telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| < 1$ , et telle que la série  $\sum u_n$  est absolument convergente.

Montrer que  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$  existe.

4) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de complexes telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| = 1$  et  $u_n \neq -1$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = e^{i\theta_n}$ , avec  $\theta_n \in ]-\pi, \pi[$ .

Montrer que  $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$  existe si et seulement si la série  $\sum \theta_n$  converge.

5) Le produit  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{i}{n} \right)$  existe-t-il ?