Feuille d'exercices 16.
Continuité

Exercice 16.1 : (niveau 1)
On pose $f(x) = e^{\cos(\sqrt{x})}$.
Déterminer les limites lorsque x tend vers 0 de $f(x)$ et $f'(x)$.

Exercice 16.2 : (niveau 1)
Déterminer la limite en 0^+ de $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$.

Exercice 16.3 : (niveau 1)
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(n) \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}}{\longrightarrow} +\infty$.
Montrer que $f(x) \underset{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 16.4 : (niveau 1)
Déterminer les applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que,
pour $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

Exercice 16.5 : (niveau 1)
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x^2) \end{array}$ est-elle uniformément continue ?

Exercice 16.6 : (niveau 2)

1°) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ telle que $x \longmapsto f(x)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \longmapsto f(x)^3$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16.7 : (niveau 2)

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $tan\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2nx}$ admet une unique solution notée x_n sur $]0, 1[$.

2°) Montrer que x_n tend vers 0 en décroissant lorsque n tend vers $+\infty$.

3°) Donner un équivalent de x_n.

Exercice 16.8 : (niveau 2)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq a|x| + b$.

Exercice 16.9 : (niveau 2)

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, montrer que l'équation $x^n = e^x$ admet une unique solution dans $[0,n]$, que l'on notera x_n.

2°) Montrer que x_n tend vers 1 en décroissant.

3°) Montrer que $x_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 16.10 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul. Soit $(f,g) \in L(E)^2$ tel que $fg - gf = Id_E$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculez $fg^n - g^n f$. Montrez que f et g ne sont pas simultanément continus.

Exercice 16.11 : (niveau 2)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une application définie sur E.
Montrer que f est continue si et seulement si , pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 16.12 : (niveau 2)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue admettant des limites finies l et l' en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 16.13 : (niveau 2)
Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} +\infty$.
Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 16.14 : (niveau 2)
On note E l'ensemble des applications de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et D l'application de E dans E définie par $D(f) = f'$.

1°) Montrer que D est discontinue pour toute norme de E.

2°) Est-ce encore vrai pour la restriction de D à un sous-espace vectoriel de E de dimension finie ?

3°) Lorsque $F = \mathbb{R}[X]$, vu comme un sous-espace vectoriel de E, donner une norme de F pour laquelle $D|_F$ est discontinue et une autre pour laquelle $D|_F$ est continue.

Exercice 16.15 : (niveau 2)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1°) Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Exercice 16.16 : (niveau 2)
Notons E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme de la convergence en moyenne (i.e : la norme 1).
Soient $\beta \geq 0$ et Φ l'application de E dans E définie par
$\forall f \in E\ \ \forall t \in [0,1]\ \ \Phi(f)(t) = t^\beta \int_0^t f(u)du$.
Montrer que $\phi \in L(E)$, puis que Φ est continue.
Calculer $\sup\limits_{\substack{f \in E \\ \|f\|_1 \leq 1}} \|\phi(f)\|_1$.

Exercice 16.17 : (niveau 3)

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, montrer que l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.

2°) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $x_n \in]0,2]$.

3°) Déterminer la limite l de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4°) Déterminer un équivalent de $x_n - l$.

Exercice 16.18 : (niveau 3)

1°) Montrer que $l^1(\mathbb{C}) \subset l^2(\mathbb{C}) \subset l^\infty(\mathbb{C})$.

2°) On note $\begin{array}{rccc} \varphi : & l^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \end{array}$.
Etudier la continuité de φ pour les normes usuelles de $l^1(\mathbb{C})$, $l^2(\mathbb{C})$ et de $l^\infty(\mathbb{C})$. Lorsqu'elle est continue, préciser la valeur de la norme de φ.

3°) Même question en remplaçant φ par $\begin{array}{rccc} \Psi : & l^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x_n}{2^n} \end{array}$.

Exercice 16.19 : (niveau 3)
Lorsque $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{q}$.
Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $f(x) = 0$.
Montrer que f est discontinue en tout rationnel et continue en tout irrationnel.
La restriction de f à $\mathbb{Q}$ est-elle continue ?

Exercice 16.20 : (niveau 3)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
Lorsque H est un sous-espace vectoriel de E, on dit que H est un hyperplan de E si et seulement si il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.
Soit H une partie de E. Montrer que H est un hyperplan fermé de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire continue non nulle.

Exercice 16.21 : (niveau 3)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, notons $g(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t)$.
Montrer que g est continue.

Exercice 16.22 : (niveau 3)
Soit f une application continue et surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que 0 possède une infinité d'antécédents.

Exercice 16.23 : (niveau 3)
Soit $f\ :\ ]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1°) Montrer que f est bornée.

2°) Pour tout $x \in]0,1]$, on pose $g(x) = \sup_{t\in]0,x]} f(t)$ et $h(x) = \inf_{t\in]0,x]} f(t)$.
Montrer que g et h possèdent des limites en 0, notées l^+ et l^-.

3°) Démontrer que f se prolonge par continuité en 0

Exercice 16.24 : (niveau 3)
Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, le nombre d'antécédents de y par f est égal à 0 ou 2.

Exercices supplémentaires :

Exercice 16.25 : (niveau 1)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une application 1-lipschitzienne de $[a, b]$ dans $[a, b]$. On note, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \frac{1}{2}(x + f(x))$.

1°) Montrer que f et g admettent des points fixes.

2°) Montrer que g est croissante.

3°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 16.26 : (niveau 1)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et surjective. Si A est une partie dense de E, montrer que $f(A)$ est une partie dense de F.

Exercice 16.27 : (niveau 1)
Soit E l'ensemble des suites de réels convergentes, muni de la norme infinie. Notons φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à (x_n) associe sa limite. φ est-elle continue ?
Montrer que $A = \{(x_n) \in E / 2 \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + 1 > exp(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)\}$ est un ouvert de E.

Exercice 16.28 : (niveau 2)
Notons $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme 1. On pose, pour tout $f, g \in E$, $B(f, g) = fg$.
Montrer que, pour tout $f \in E$, l'application $g \longmapsto B(f, g)$ est continue, mais que B n'est pas continue.

Exercice 16.29 : (niveau 2)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'image réciproque de tout compact est compact si et seulement si $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $|f(x)| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 16.30 : (niveau 2)
Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |e^{-|t|}P(t)|$.

1°) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

2°) L'application $\varphi : P \longmapsto P(X + 1)$ de E dans E est-elle continue ?

Exercice 16.31 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et K un compact de E. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés de K. Soit $f : K \longrightarrow K$ une application continue.
Montrez que $f\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.

Exercice 16.32 : (niveau 2)
Déterminer les applications continues $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ telles que $f \circ f = f$.

Exercice 16.33 : (niveau 2)
Pour tout i dans $\{1,2\}$, on note p_i application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $p_i(x_1,x_2)=x_i$.

1°) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $p_1(O)$ est un ouvert.

2°) On note $H=\{(x,y)/xy=1\}$. Montrer que H est un fermé mais que $p_1(H)$ n'est pas fermé.

3°) Soit F un fermé. On suppose $p_2(F)$ est borné. Montrer que $p_1(F)$ est fermé.

Exercice 16.34 : (niveau 2)
On note E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme infinie. Soit $\varphi\in L(E,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f\in E\ \ [(\forall x\in[0,1]\ \ f(x)\geq 0)\Longrightarrow\varphi(f)\geq 0].$$

Montrez que φ est continue.

Exercice 16.35 : (niveau 2)
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}}\ \lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ m\in\mathbb{N}}}\cos(n!\pi x)^{2m}$.

Exercice 16.36 : (niveau 2)
Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$ et soit f une application de A dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\sup\limits_{x\in A}f(x)=+\infty$. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 16.37 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}-espace$ vectoriel normé. Soient K et L deux compacts de E. Montrez que la réunion des segments joignant les points de K et de L est compacte.

Exercice 16.38 : (niveau 2)
Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(2x+1)=f(x)$.

Exercice 16.39 : (niveau 3)

E est l'ensemble des suites presque nulles de $\mathbb{C}$ et $\begin{array}{rccc}\varphi: & E & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & (u_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{2^n}\end{array}$.

1°) Pour tout $(u_n)\in E$, on pose $\|(u_n)\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ et $\|(u_n)\|_1=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

On admettra que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont des normes sur E.
Pour ces deux normes, montrer que φ est continue.

2°) Déterminer une norme sur E pour laquelle φ n'est pas continue.

Exercice 16.40 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que si f est continue, le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2°) Montrer que toute suite bornée de réels admettant une unique valeur d'adhérence est convergente.

3°) On suppose que f est bornée et que son graphe est fermé.
Montrer que f est continue.

4°) Si l'on suppose seulement que le graphe de f est fermé.
Peut-on affirmer que f est continue ?

Exercice 16.41 : (niveau 3)
On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme.

1°) Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note
$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$. Montrer que Φ est continue.

2°) Montrer que $A = \{f \in E / \forall x \in [0,1] \ \ 2f(x) + 1 \geq e^{f(x)}\}$ est un fermé.

Exercice 16.42 : (niveau 3)
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Montrer que pour tout $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \dfrac{f(x)}{x}$.

2°) Montrer que f est continue.

Exercice 16.43 : (niveau 3)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et f une application définie sur E et à valeurs dans F.
Si A est une partie non vide de F, on note $\delta(A)$ le diamètre de A.
Si $x \in E$, on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x et
on pose $\omega_x(f) = \inf\{\delta(f(V)) / V \in \mathcal{V}(x)\}$. Il s'agit du saut de f en x.

1°) Soit $x \in E$. Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega_x(f) = 0$.

2°) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A_\varepsilon = \{x \in E / \omega_x(f) \geq \varepsilon\}$ est un fermé de E.

3°) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est une réunion dénombrable de fermés de E.

Exercice 16.44 : (niveau 3)
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, K est un compact non vide de E et $f : K \longrightarrow K$ est une application telle que, pour tout $(x,y) \in K^2$, $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$.
A l'aide de l'application $x \longmapsto \|f(x) - x\|$, montrer qu'il existe un unique $l \in K$ tel que $f(l) = l$.
Montrer que pour tout $x_0 \in K$, si l'on pose $x_{n+1} = f(x_n)$, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 16.45 : (niveau 3)

1°) Combien d'éléments au minimum doit-on enlever de l'intervalle $[0,1]$ pour obtenir un ensemble A sur lequel est définie au moins une application continue et surjective dans $\mathbb{R}$.

2°) Même question en remplaçant "surjective" par "bijective".

3°) Les applications continues de $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ sont-elles bornées ?

Exercice 16.46 : (niveau 3)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et f une application de E dans E que l'on suppose bornée sur la boule unité et telle que, pour tout $(x,y)\in E^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Montrer que f est linéaire et continue.

Exercice 16.47 : (niveau 3)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de Banach. On note $\mathcal{LC}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus sur E. Montrer que $\mathcal{LC}(E)$ est un espace de Banach.

Exercice 16.48 : (niveau 3)
On note E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On fixe $g\in E$.
Pour tout $f\in E$, on note $N_g(f)=\displaystyle\int_0^1 |f(t)g(t)|dt$.

1°) Montrer que N_g est une norme sur E si et seulement si l'intérieur de $g^{-1}(\{0\})$ est vide.

2°) Dans ce cas, montrer que N_g et $\|.\|_1$ sont équivalentes si et seulement si $g^{-1}(\{0\})=\emptyset$.

Exercice 16.49 : (niveau 3)
Soit P une fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit F un fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que $P(F)$ est fermé.

Exercice 16.50 : (niveau 3)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux réels. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue à droite en tout point. Montrer que le nombre de points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
Indications : On pourra commencer par montrer qu'on peut se limiter au cas où I est un segment et où f est bornée sur I, puis utiliser la quantité

$$\omega(x)=\lim_{h\to 0^+}\sup_{t\in[x-h,x]} f(t)-\lim_{h\to 0^+}\inf_{t\in[x-h,x]} f(t).$$