DM 38 : Complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le vendredi 21 février 2025.

On admettra les deux propriétés suivantes, que l'on démontrera plus tard en cours :

Formule du rang : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. Soit $u \in L(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. La dimension de u s'appelle le rang de u, elle est notée $\mathrm{rg}(u)$.
On dispose alors de la formule suivante : $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Il s'agit de la formule du rang.

Formule de Grassmann : On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Partie I

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On pose $c(E) = E \times E$.
Pour tout $(x, y) \in c(E)$, $(x', y') \in c(E)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on note :
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(\alpha + i\beta).(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$.

1°) Montrer que $(c(E), +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.
Montrer que $(c(E), +, .)$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2°) **a**) On note $E' = \{(x, 0)/x \in E\}$.
Vérifier que E' est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $c(E)$.
Montrer que l'application $x \longmapsto (x, 0)$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme de E sur E'.
Pour la suite de ce problème, lorsque $x \in E$, on identifie x avec $(x, 0)$, c'est-à-dire que l'on convient que, pour tout $x \in E$, $(x, 0) = x$. Ainsi, $E = E' \subset c(E)$.

2°) **b**) Soit $z \in c(E)$. Montrer qu'il existe un unique $(x, y) \in E^2$ tel que $z = x + iy$.
On notera $x = R(z)$ et $y = I(z)$.
Montrer que $R(-iz) = I(z)$.

Lorsque $z = x + iy$ avec $x, y \in E$, on note $\overline{z} = x - iy$.
Si V est une partie de $c(E)$, on note $\overline{V} = \{\overline{u}/u \in V\}$.

3°) a) Soit V une partie de $c(E)$ et soit $z \in c(E)$.
Montrer que $z \in \overline{V}$ si et seulement si $\overline{z} \in V$.

3°) b) Soit F un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $c(E)$. Montrer que F est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $c(E)$ si et seulement si, pour tout $z \in F$, $iz \in F$.

3°) c) Si F est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $c(E)$, montrer que $\overline{F}$ est aussi un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $c(E)$.

4°) a) Montrer que $c(E)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

4°) b) Si F est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $c(E)$, montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2\dim_{\mathbb{C}}(F)$, où $\dim_{\mathbb{R}}(F)$ désigne la dimension de F en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et où $\dim_{\mathbb{C}}(F)$ désigne la dimension de F en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

5°) Soit u un $\mathbb{R}$-endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un unique $\mathbb{C}$-endomorphisme u' sur $c(E)$ qui prolonge u, c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in E$, $u'(x) = u(x)$.
Pour la suite du problème et sauf indication du contraire, le corps de référence est $\mathbb{C}$ pour les sous-espaces vectoriels de $c(E)$ et pour les endomorphismes de $c(E)$. Bien sûr, le corps de référence est $\mathbb{R}$ pour les sous-espaces vectoriels de E et pour les endomorphismes de E.

Partie II

Dans toute cette partie, Σ désigne un sous-espace vectoriel de $c(E)$.

6°) a) On note $R(\Sigma) = \{R(z)/z \in \Sigma\}$ et $I(\Sigma) = \{I(z)/z \in \Sigma\}$.
Montrer que $R(\Sigma)$ est un sous-espace vectoriel de E et que $R(\Sigma) = I(\Sigma)$.

6°) b) Lorsque H est un sous-espace vectoriel de E, montrer que $R(c(H)) = H$.

7°) a) Montrer que $\Sigma \cap E$ est un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que $\Sigma \cap \overline{\Sigma} = c(\Sigma \cap E)$.

7°) b) Montrer que $\Sigma + \overline{\Sigma} = c(R(\Sigma))$.

7°) c) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\Sigma = c(H)$ si et seulement si $\Sigma = \overline{\Sigma}$.

8°) a) Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) - \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma \cap \overline{\Sigma})$.

Pour toute la suite du problème, on dira que Σ est irréel si et seulement si $\Sigma \cap E = \{0\}$.

8°) b) Montrer que Σ est irréel si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma)$.

9°) a) Montrer que Σ est irréel si et seulement si l'application $z \longmapsto R(z)$ est une injection de Σ dans $R(\Sigma)$.
Montrer que Σ est irréel si et seulement si l'application $z \longmapsto I(z)$ est une injection de Σ dans $R(\Sigma)$.

9°) b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $(z_1, \ldots, z_q)$ une famille de q vecteurs de $c(E)$.
Montrer que $(z_1, \ldots, z_q)$ est une base d'un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$ si et seulement si les $2q$ vecteurs $R(z_1), \ldots, R(z_q), I(z_1), \ldots, I(z_q)$ forment une famille libre de E.

9°) c) Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension paire et soit σ un automorphisme de H tel que $\sigma \circ \sigma = -Id_H$. On pose $S = \{x + i\sigma(x) / x \in H\}$.
Montrer que S est un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$ tel que $R(S) = H$.

9°) d) Soit S un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E de dimension paire et un automorphisme σ de H vérifiant $\sigma \circ \sigma = -Id_H$, tels que $S = \{x + i\sigma(x) / x \in H\}$.

Partie III

On rappelle que, cf question 5, si u est un endomorphisme de E, on a noté u' son unique prolongement en un endomorphisme de $c(E)$.

10°) Soit φ un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $c(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (u, v) d'endomorphismes de E tel que $\varphi = u' + iv'$.

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des $\mathbb{C}$-endomorphismes φ de $c(E)$ tels que $\varphi(E)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.

11°) a) Soit φ un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $c(E)$.
Montrer que les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $\varphi \in \mathcal{L}$.
ii) $\varphi(E) = (i\varphi)(E)$.
iii) $\varphi(E) = \varphi(c(E))$.
iv) $R(\mathrm{Ker}(\varphi)) = E$.

11°) b) Soit $\varphi \in \mathcal{L}$. Ecrivons $\varphi = u' + iv'$, où u et v sont deux endomorphismes de E.
Montrer que $2\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v))$.

On note $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{L}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est irréel.

12°) a) Montrer que si E est de dimension impaire, alors $\mathcal{L}_0 = \emptyset$.

Pour la suite du problème, on suppose que E est de dimension paire.

12°) b) Montrer que si $\varphi = u' + iv' \in \mathcal{L}_0$, alors
$\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0\}$ et il existe un endomorphisme σ de E tel que $\sigma \circ \sigma = -Id_E$, $u = v \circ \sigma$ et $v = -u \circ \sigma$.

12°) c) Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0\}$.
Montrer que s'il existe un endomorphisme τ de E tel que $u = v \circ \tau$ et $v = -u \circ \tau$, alors $u' + iv' \in \mathcal{L}_0$, τ est unique et $\tau \circ \tau = -Id_E$.