DM 38 : un corrigé

Partie I

1°) $\diamond$ $(c(E), +)$ est exactement le groupe produit de $(E, +)$ par lui-même, donc c'est un groupe commutatif d'après le cours.

$\diamond$ Soit $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ et $x, y, x', y' \in E$.

— $1.(x, y) = (1 + 0i).(x, y) = (1.x - 0.y, 0.x + 1.y) = (x, y)$;

— $(\alpha + i\beta).[(x, y) + (x', y')] = (\alpha + i\beta).(x + x', y + y')$, donc

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta).[(x, y) + (x', y')] &= (\alpha(x + x') - \beta(y + y'), \alpha(y + y') + \beta(x + x')) \\ &= (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) + (\alpha x' - \beta y', \alpha y' + \beta x') \\ &= (\alpha + i\beta).(x, y) + (\alpha + i\beta).(x', y');\end{aligned}$$

— $[(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta')].(x, y) = [(\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta')].(x, y)$, donc

$$\begin{aligned}[(\alpha + i\beta) + (\alpha' + i\beta')].(x, y) &= ((\alpha + \alpha')x - (\beta + \beta')y, (\beta + \beta')x + (\alpha + \alpha')y) \\ &= (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) + (\alpha' x - \beta' y, \beta' x + \alpha' y) \\ &= (\alpha + i\beta).(x, y) + (\alpha' + i\beta').(x, y);\end{aligned}$$

— $(\alpha + i\beta).[(\alpha' + i\beta').(x, y)]$ est égal aux expressions successives suivantes :
$(\alpha + i\beta)(\alpha' x - \beta' y, \alpha' y + \beta' x)$,
$(\alpha(\alpha' x - \beta' y) - \beta(\alpha' y + \beta' x), \alpha(\alpha' y + \beta' x) + \beta(\alpha' x - \beta' y))$,
$((\alpha\alpha' - \beta\beta')x + (\alpha\beta' + \beta\alpha')(-y), (\alpha\alpha' - \beta\beta')y + (\alpha\beta' + \beta\alpha')x)$,
$(\alpha\alpha' - \beta\beta' + i(\alpha\beta' + \beta\alpha')).(x, y)$.
Donc $(\alpha + i\beta).[(\alpha' + i\beta').(x, y)] = [(\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta')].(x, y)$.

Ainsi, $(c(E), +, .)$ est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\diamond$ Par restriction de $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} \times c(E) & \longrightarrow & c(E) \\ (z, (x, y)) & \longmapsto & z.(x, y)\end{array}$ à $\mathbb{R} \times c(E)$, on vérifie que $c(E)$ est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec la loi suivante : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in c(E)$, $\alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$: il s'agit du $\mathbb{R}$-espace vectoriel produit de $(E, +, .)$ par lui-même.

2°) **a)** $\diamond$ E' est non vide car $(0, 0) \in E'$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, 0), (y, 0) \in E'$. Alors $\alpha.(x, 0) + (y, 0) = (\alpha x + y, 0) \in E'$, donc E' est bien un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.

$\diamond$ Notons $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ x & \longmapsto & (x, 0)\end{array}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$.
$\varphi(\alpha x + y) = (\alpha x + y, 0) = \alpha.(x, 0) + (y, 0) = \alpha\varphi(x) + \varphi(y)$, donc φ est $\mathbb{R}$-linéaire.
Par définition de E', φ est surjective.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $(x, 0) = 0_{c(E)} = (0, 0)$, donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

Ainsi, φ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme.

2°) b) $\diamond$ Soit $z \in c(E)$ et $x, y \in E$.
$z = x + iy \iff z = (x, 0) + i(y, 0) \iff z = (x, 0) + (0, y) \iff z = (x, y)$, or $c(E) = E \times E$, donc pour tout $z \in c(E)$, il existe un unique couple (x, y) d'éléments de E tel que $z = (x, y)$, c'est-à-dire tel que $z = x + iy$.
$\diamond$ Soit $z = x + iy \in c(E)$, avec $x, y \in E$.
$-iz = (0 + (-1)i)(x, y) = (y, -x) = y - ix$, donc $R(-iz) = y = I(z)$.

3°) a) Soit $z = x + iy \in c(E)$ avec $x, y \in E$ et $z' = x' + iy' \in c(E)$ avec $x', y' \in E$.
Alors $z = \overline{z'} \iff x + iy = x' - iy' \iff (x = x') \wedge (y = -y') \iff x - iy = x' + iy$, donc $z = \overline{z'} \iff \overline{z} = z'$. On en déduit que
$z \in \overline{V} \iff [\exists z' \in V,\ \ z = \overline{z'}] \iff [\exists z' \in V,\ \ \overline{z} = z'] \iff \overline{z} \in V$.

3°) b) Soit F un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $c(E)$.
Si F est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $c(E)$, alors pour tout $z \in F$, $iz \in F$.
Réciproquement, supposons que pour tout $z \in F$, $iz \in F$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $z \in F$. $(\alpha + i\beta)z = \alpha z + \beta(iz)$, or z et iz sont dans F et F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel , donc $(\alpha + i\beta)z \in F$. De plus F est non vide et, pour tout $z, z' \in F$, $z + z' \in F$. Ainsi, F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel.

3°) c) L'application $\begin{array}{rccc} u: & c(E) & \longrightarrow & c(E) \\ & z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $c(E)$. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x, y, x', y' \in E$, $\overline{\alpha(x + iy) + (x' + iy')} = \overline{(\alpha x + x') + i(\alpha y + y')}$, donc $\overline{\alpha(x + iy) + (x' + iy')} = (\alpha x + x') - i(\alpha y + y') = \alpha\overline{x + iy} + \overline{x' + iy'}$.
Supposons que F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$. Alors $\overline{F} = u(F)$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.
Soit de plus $z = x + iy \in \overline{F}$, avec $x, y \in E$. Alors $\overline{z} = x - iy \in F$ d'après 3.a, donc $-i\overline{z} \in F$, puis $\overline{-i\overline{z}} \in \overline{F}$. Or $\overline{-i\overline{z}} = \overline{-i(x - iy)} = \overline{-y - ix} = -y + ix = i(x + iy) = iz$, donc $iz \in \overline{F}$. D'après la question précédente, $\overline{F}$ est bien un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.

4°) a) En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $c(E) = E \times E$ est de dimension finie d'après le cours. Ainsi, il possède une $\mathbb{R}$-base notée $(e_1, \ldots, e_n) = e$. Pour tout $z \in c(E)$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Mais $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ et $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . e_i$. Ceci prouve que e est une famille $\mathbb{C}$-génératrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $c(E)$, donc $c(E)$ est bien de dimension finie en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

4°) b) Soit F un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$. Il est non vide et stable par combinaison linéaire, à coefficients complexes donc en particulier à coefficients réels, donc c'est bien aussi un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.
Notons $p = \dim_{\mathbb{C}}(F)$. Il existe une $\mathbb{C}$-base $B = (b_1, \ldots, b_p)$ de F.

Posons $B' = (b_1, \dots, b_p, ib_1, \dots, ib_p)$. Nous allons montrer que B' est une $\mathbb{R}$-base de F, ce qui prouvera que $\dim_{\mathbb{R}}(F) = |B'| = 2|B| = 2\dim_{\mathbb{C}}(F)$.

Soit $z \in F$. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ tels que $z = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k b_k$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, posons $\alpha_k = x_k + iy_k$, avec $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Alors $z = \sum_{k=1}^{p} (x_k b_k + y_k (ib_k))$, donc B' est $\mathbb{R}$-génératrice de F.

Soit maintenant $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} x_k b_k + \sum_{k=1}^{p} y_k (ib_k) = 0$. Alors en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, $\alpha_k = x_k + iy_k$, le même calcul que précédemment donne $0 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k$. Mais B est $\mathbb{C}$-libre, donc pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, $\alpha_k = 0$, donc $x_k = y_k = 0$, ce qui prouve que B' est $\mathbb{R}$-libre, donc que c'est bien une $\mathbb{R}$-base.

5°) Procédons par analyse-synthèse.
Supposons qu'il existe $u' \in L(c(E))$ tel que $u'|_E^E = u$.
Pour tout $z = x + iy \in c(E)$, où $x, y \in E$, $u'(z) = u'(x) + iu'(y)$, car u' est $\mathbb{C}$-linéaire, donc $u'(z) = u(x) + iu(y)$. Ainsi, si u' existe, il est unique.
Synthèse : Notons $u' : \begin{array}{ccc} c(E) & \longrightarrow & c(E) \\ z = x + iy & \longmapsto & u'(z) = u(x) + iu(y) \end{array}$.
Soit $z = (x, y) \in c(E)$.
Alors $u'(iz) = u'(-y + ix) = -u(y) + iu(x) = i(u(x) + iu(y)) = iu'(z)$.
De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z' = (x', y') \in c(E)$,
$$\begin{aligned} u'(\alpha z + z') &= u'((\alpha x + x') + i(\alpha y + y')) \\ &= u(\alpha x + x') + iu(\alpha y + y') \\ &= \alpha(u(x) + iu(y)) + u(x') + iu(y') \\ &= \alpha u'(z) + u'(z'). \end{aligned}$$
Avec $\alpha = 1$, on en déduit que u' est additive. De plus, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$u'((\alpha + i\beta)z) = u'(\alpha z + i\beta z) = \alpha u'(z) + \beta u'(iz) = \alpha u'(z) + i\beta u'(z)$, d'après ce qui précède, donc $u'((\alpha + i\beta)z) = (\alpha + i\beta)u'(z)$. Ceci prouve que u' est $\mathbb{C}$-linéaire.
Enfin, il est clair que $u'|_E^E = u$, ce qui prouve l'existence.

Partie II

6°) a) R est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $c(E)$ dans E, donc $R(\Sigma)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $x \in R(\Sigma)$. Il existe $y \in E$ tel que $x + iy \in \Sigma$. Σ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $i(x+iy) \in \Sigma$. Ainsi, $x = I(i(x+iy)) \in I(\Sigma)$. On a montré que $R(\Sigma) \subset I(\Sigma)$. L'inclusion réciproque se démontre de la même manière.

6°) b) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E.
Si $h \in H$, $h + 0.i \in c(H)$ et $h = R(h + 0.i)$, donc $h \in R(c(H))$.

Réciproquement, si $h \in R(c(H))$, il existe $y \in E$ tel que $h + iy \in c(H)$, donc $h \in H$.

7°) a) $\diamond$ Σ et E sont deux $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $c(E)$, donc $\Sigma \cap E$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$, inclus dans E, donc c'est un sous-espace vectoriel de E.
$\diamond$ Soit $z \in c(\Sigma \cap E)$: il existe $x, y \in \Sigma \cap E$ tels que $z = x + iy$.
$x, y \in \Sigma$ et Σ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $z \in \Sigma$. De plus $\overline{z} = x - iy$, donc on a aussi $\overline{z} \in \Sigma$. D'après la question 3.a, $z \in \overline{\Sigma}$. Ainsi, $c(\Sigma \cap E) \subset \Sigma \cap \overline{\Sigma}$.
Réciproquement, soit $z \in \Sigma \cap \overline{\Sigma}$. Il existe $x, y \in E$ tels que $z = x + iy$. D'après la question 3.a, $\overline{z} \in \Sigma$, donc $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \in E \cap \Sigma$. De même, $y = -\frac{i}{2}(z - \overline{z}) \in E \cap \Sigma$, donc $z \in c(E \cap \Sigma)$. On a prouvé que $\Sigma \cap \overline{\Sigma} = c(\Sigma \cap E)$.

7°) b) $\diamond$ Soit $z \in \Sigma + \overline{\Sigma}$. Il existe $x, x', y, y' \in E$ tels que $z = (x + iy) + (x' + iy')$ avec $x + iy \in \Sigma$ et $x' - iy' \in \Sigma$ d'après la question 3.a. Alors $x = R(x + iy) \in R(\Sigma)$ et $y = I(x + iy) \in I(\Sigma) = R(\Sigma)$. De même, x' et y' sont dans $R(\Sigma)$,
donc $z = (x + x') + i(y + y') \in c(R(\Sigma))$. Ainsi, $\Sigma + \overline{\Sigma} \subset c(R(\Sigma))$.
$\diamond$ Réciproquement, soit $z \in c(R(\Sigma))$. Il existe $x, y \in R(\Sigma)$ tel que $z = x + iy$.
$x \in R(\Sigma)$, donc il existe $y' \in E$ tel que $x + iy' \in \Sigma$.
$y \in R(\Sigma) = I(\Sigma)$, donc il existe $x' \in E$ tel que $x' + iy \in \Sigma$.
On vérifie que $z = \frac{1}{2}[(x + iy') + (x - iy')] + \frac{1}{2}[(x' + iy) + (-x' + iy)]$,
or $x + iy' \in \Sigma$ et $x - iy' \in \overline{\Sigma}$, donc $\frac{1}{2}[(x + iy') + (x - iy')] \in \Sigma + \overline{\Sigma}$. De même, $\frac{1}{2}[(x' + iy) + (-x' + iy)] \in \Sigma + \overline{\Sigma}$, donc $z \in \Sigma + \overline{\Sigma}$.
On a prouvé que $\Sigma + \overline{\Sigma} = c(R(\Sigma))$.

7°) c) Si $\Sigma = \overline{\Sigma}$, alors $\Sigma = \Sigma + \overline{\Sigma} = c(R(\Sigma))$, donc il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\Sigma = c(H)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\Sigma = c(H)$.
Soit $z = x + iy \in \Sigma$, avec $x, y \in E$. Ainsi, $x, y \in H$, donc $\overline{z} = x - iy \in c(H) = \Sigma$, puis $z \in \overline{\Sigma}$. On a montré que $\Sigma \subset \overline{\Sigma}$.
En utilisant l'application u de la question 3.c, on en déduit que $\overline{\Sigma} = u(\Sigma) \subset u^2(\Sigma) = \Sigma$, car $u^2 = Id_{c(E)}$. Ainsi, $\Sigma = \overline{\Sigma}$.

8°) a) D'après la question 4.b, $2\dim_{\mathbb{C}}(c(R(\Sigma))) = \dim_{\mathbb{R}}(c(R(\Sigma)))$,
mais si H est un sous-espace vectoriel de E, $\dim_{\mathbb{R}}(c(H)) = \dim_{\mathbb{R}}(H \times H) = 2\dim_{\mathbb{R}}(H)$, donc $\dim_{\mathbb{C}}(c(R(\Sigma))) = \dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma))$.
Ainsi, d'après la question 7.b,
$\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma + \overline{\Sigma}) = \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) + \dim_{\mathbb{C}}(\overline{\Sigma}) - \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma \cap \overline{\Sigma})$.
De plus, d'après la question 3.c, $u : z \longmapsto \overline{z}$ est un $\mathbb{R}$-endomorphisme involutif, donc $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) = 2\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma) = 2\dim_{\mathbb{R}}(\overline{\Sigma}) = \dim_{\mathbb{C}}(\overline{\Sigma})$.
On en déduit que $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) - \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma \cap \overline{\Sigma})$.

8°) b) Si H est un sous-espace vectoriel de E, on a vu au début de la question précédente que $\dim_{\mathbb{C}}(c(H)) = \dim_{\mathbb{R}}(H)$.

En particulier, $H = \{0\}$ si et seulement si $c(H) = \{0\}$. On en déduit que Σ est irréel $\iff \Sigma \cap E = \{0\} \iff c(\Sigma \cap E) = \{0\} \iff \Sigma \cap \overline{\Sigma} = \{0\}$, d'après la question 7.a. Alors, d'après la question précédente, Σ est irréel si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma)$.

9°) a) $R|_{\Sigma}^{R(\Sigma)}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire surjective de Σ dans $R(\Sigma)$, donc elle est injective si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma) = \dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma))$, mais $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma)$, donc d'après la question précédente, $R|_{\Sigma}^{R(\Sigma)}$ est injective si et seulement si Σ est irréel.
$I|_{\Sigma}^{I(\Sigma)}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire surjective de Σ dans $I(\Sigma) = R(\Sigma)$, donc on conclut de la même façon.

9°) b) $\diamond$ Supposons que $(z_1, \dots, z_q)$ est une base d'un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$, noté Σ. Soit $x \in R(\Sigma)$. Il existe $y \in E$ tel que $x + iy \in \Sigma$. Alors, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{C}$ tels que $x + iy = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \alpha_j z_j$.

Ainsi, $x = R(x+iy) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} [\mathrm{Re}(\alpha_j)R(z_j) - \mathrm{Im}(\alpha_j)I(z_j)]$, donc $R(\Sigma)$ est engendrée par la famille $(R(z_1), \dots, R(z_q), I(z_1), \dots, I(z_q))$, laquelle est incluse dans $R(\Sigma) = I(\Sigma)$.
De plus, $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma)$, car Σ est irréel, donc $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2q$. La famille précédente est donc une base de $R(\Sigma)$, ce qui prouve qu'elle est libre.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que la famille $(R(z_1), \dots, R(z_q), I(z_1), \dots, I(z_q))$ est $\mathbb{R}$-libre dans E.
Soit $(\lambda_j)_{1 \le j \le q} \in \mathbb{C}^q$ telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \lambda_j z_j \in E$.
Alors $0 = I\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \lambda_j z_j\Big) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} [\mathrm{Re}(\lambda_j)I(z_j) + \mathrm{Im}(\lambda_j)R(z_j)]$. Alors, d'après l'hypothèse, pour tout $j \in \mathbb{N}_q$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) = \mathrm{Im}(\lambda_j) = 0$, donc $\lambda_j = 0$.
En particulier, si $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \lambda_j z_j = 0$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}_q$, $\lambda_j = 0$, donc la famille $(z_1, \dots, z_q)$ est libre.
Mais on a également prouvé que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_q) \cap E = \{0\}$, donc $(z_1, \dots, z_q)$ est une base de l'espace irréel $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_q)$.

9°) c) $\diamond$ Notons f l'application $\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & S \\ x & \longmapsto & x + i\sigma(x) \end{array}$. f est $\mathbb{R}$-linéaire. Elle est surjective par définition de S. De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $x + i\sigma(x) = 0$, donc $x = 0$. Ainsi f est un $\mathbb{R}$-isomorphisme.
On en déduit que $S = f(H)$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.
$\diamond$ Soit $z \in S$. Il existe $x \in H$ tel que $z = x + i\sigma(x)$.
Alors $iz = -\sigma(x) + ix = -\sigma(x) + i\sigma(-\sigma(x)) \in S$. D'après la question 3.b, S est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.

$\diamond$ Soit $z \in S \cap E$. Il existe $x \in H$ tel que $z = x + i\sigma(x)$, mais $z \in E$, donc $\sigma(x) = 0$, puis $x = 0$. Ainsi $z = 0$. Ceci prouve que $S \cap E = \{0\}$, c'est-à-dire que S est irréel.
$\diamond$ Soit $x \in H$. Alors $z = x + i\sigma(x) \in S$, puis $x = R(z) \in R(S)$, donc $H \subset R(S)$.
f étant un $\mathbb{R}$-isomorphisme, $\dim_{\mathbb{R}}(H) = \dim_{\mathbb{R}}(S) = 2\dim_{\mathbb{C}}(S) = \dim_{\mathbb{R}}(R(S))$, car S est irréel, donc $H = R(S)$.

9°) d) On suppose que S est un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$.
Notons $q = \dim_{\mathbb{C}}(S)$. Il existe une $\mathbb{C}$-base $(z_1, \ldots, z_q)$ de S. Alors d'après la question b, la famille $B = (R(z_1), \ldots, R(z_q), I(z_1), \ldots, I(z_q))$ est une base de $R(S)$. En particulier, $H = R(S)$ est de dimension paire, égale à $2q$.
D'après le cours, il existe un unique endomorphisme σ sur $R(S)$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $\sigma(R(z_i)) = I(z_i)$ et $\sigma(I(z_i)) = -R(z_i)$.
Il est clair que, pour tout vecteur x de la base B, $\sigma(\sigma(x)) = -x$, donc $\sigma \circ \sigma = -Id_{R(S)}$.
En particulier, σ est un automorphisme de $R(S) = H$.
Notons f l'application de H dans $c(E)$ définie par : pour tout $x \in H$, $f(x) = x + i\sigma(x)$.
f est $\mathbb{R}$-linéaire car σ est $\mathbb{R}$-linéaire, donc
$\{x + i\sigma(x) \ / \ x \in H\} = \mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(B)) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f(B))$,
or pour tout $k \in \mathbb{N}_q$, $f(R(z_k)) = R(z_k) + i\sigma(R(z_k)) = R(z_k) + iI(z_k) = z_k$
et $f(I(z_k)) = I(z_k) - iR(z_k) = -iz_k$, donc $f(B) = (z_1, \ldots, z_q, -iz_1, \ldots, -iz_q)$. Ainsi, $\{x + i\sigma(x) \ / \ x \in H\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(z_1, \ldots, z_q, -iz_1, \ldots, -iz_q) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z_1, \ldots, z_q) = S$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie III

10°) Soit φ un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $c(E)$.
$\diamond$ *Existence :* Soit $x + iy \in c(E)$, avec $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy) &= \varphi(x) + i\varphi(y)\\ &= R(\varphi(x)) + iI(\varphi(x)) + i(R(\varphi(y)) + iI(\varphi(y)))\\ &= R \circ \varphi(x) + iR \circ \varphi(y) + i(I \circ \varphi(x) + iI \circ \varphi(y)),\end{aligned}$$

donc $\varphi(x + iy) = u'(x + iy) + v'(x + iy)$, si l'on pose $\begin{array}{rccc} u : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & R \circ \varphi(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} v : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & I \circ \varphi(x) \end{array}$. u et v sont bien des endomorphismes de E, en tant que composées d'applications $\mathbb{R}$-linéaires. Ceci prouve l'existence.
$\diamond$ *Unicité :* Supposons que $\varphi = u_1' + iv_1'$, où $u_1, v_1 \in L(E)$. Soit $x \in E$.
$u(x) + iv(x) = u'(x) + iv'(x) = \varphi(x) = u_1'(x) + iv_1'(x) = u_1(x) + iv_1(x)$, or $u(x), v(x), u_1(x)$ et $v_1(x)$ sont dans E, donc d'après la question 2.b, $u(x) = u_1(x)$ et $v(x) = v_1(x)$. Ainsi, $u = u_1$ et $v = v_1$, ce qui prouve l'unicité.

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des $\mathbb{C}$-endomorphismes φ de $c(E)$ tels que $\varphi(E)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.

11°) a) $\diamond$ *i*) $\Longrightarrow$ *ii*) : on suppose que $\varphi(E)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$. D'après la question 3.c, pour tout $z \in \varphi(E)$, $iz \in \varphi(E)$, donc $(i\varphi)(E) \subset \varphi(E)$. En

multipliant par i, on en déduit que $\varphi(E) = -\varphi(E) = i(i\varphi(E)) \subset (i\varphi(E))$, donc $\varphi(E) = (i\varphi)(E)$.
$\diamond$ $ii) \Longrightarrow iii)$: On suppose que $\varphi(E) = (i\varphi)(E)$.
$\varphi(c(E)) = \{\varphi(x+iy) \ / \ x, y \in E\} = \{\varphi(x) + (i\varphi)(y) \ / \ x, y \in E\} = \varphi(E) + (i\varphi(E))$, donc d'après l'hypothèse, $\varphi(c(E)) = \varphi(E) + \varphi(E) = \varphi(E)$, car $\varphi(E)$ est stable pour l'addition (c'est toujours un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel).
$\diamond$ $iii) \Longrightarrow iv)$: On suppose que $\varphi(E) = \varphi(c(E))$.
Soit $x \in E$. $\varphi(x) = \varphi(-i(ix)) = -i\varphi(ix)$, mais $\varphi(ix) \in \varphi(c(E)) = \varphi(E)$, donc il existe $y \in E$ tel que $\varphi(ix) = \varphi(y)$. Alors $\varphi(x) = -i\varphi(y)$, donc $\varphi(x+iy) = 0$. Ainsi, $x + iy \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $x \in R(\mathrm{Ker}(\varphi))$.
Réciproquement, il est clair que $R(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subset E$.
$\diamond$ $iv) \Longrightarrow i)$: On suppose que $R(\mathrm{Ker}(\varphi)) = E$.
Soit $z \in \varphi(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = \varphi(x)$.
$iz = \varphi(ix)$, mais $x \in R(\mathrm{Ker}(\varphi))$, donc il existe $y \in E$ tel que $\varphi(x+iy) = 0$. Ainsi, $\varphi(x) = -i\varphi(y)$, puis $iz = i\varphi(x) = \varphi(y) \in \varphi(E)$.
$\varphi(E)$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, d'après la question 3.b, $\varphi(E)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $c(E)$.

11°) b) D'après la formule du rang, en notant $n = \dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{\mathbb{C}}(c(E))$,
$2\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\varphi) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2(n - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(\varphi)))$, donc d'après la question 8.a,
$2\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\varphi) = 2n - (\dim_{\mathbb{R}}(R(\mathrm{Ker}(\varphi))) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}))$.
Ensuite, d'après la propriété *iv* et la question 7.a,
$2\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\varphi) = 2n - (n + \dim_{\mathbb{C}}(c(\mathrm{Ker}(\varphi) \cap E))) = n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\varphi) \cap E)$.
Soit $x \in E$. $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap E \Longleftrightarrow 0 = \varphi(x) = u'(x) + iv'(x) = u(x) + iv(x)$, donc
$x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap E \Longleftrightarrow u(x) = v(x) = 0$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap E = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
On a bien montré que $2\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v))$.

12°) a) On suppose que E est de dimension impaire.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}_0$. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est irréel, donc d'après la question 8.b et la propriété *iv*),
$\dim(E) = \dim(R(\mathrm{Ker}(\varphi))) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(\varphi))$, donc $\dim(E)$ est paire. C'est faux, donc $\mathcal{L}_0$ est vide.

12°) b) On suppose que $\varphi = u' + iv' \in \mathcal{L}_0$.
$\diamond$ $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap E = \{0\}$, car $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est irréel.
$\diamond$ Notons $(x_1 + iy_1, \ldots, x_p + iy_p)$ une $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après la question 9.b, $b = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$ est une $\mathbb{R}$-base de $R(\mathrm{Ker}(\varphi)) = E$ (d'après *iv*)).
Notons σ l'unique endomorphisme de E tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, $\sigma(x_j) = y_j$ et $\sigma(y_j) = -x_j$. On vérifie aisément que, pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, $\sigma^2(x_j) = -x_j$ et $\sigma^2(y_j) = -y_j$, donc $\sigma^2 = -\mathrm{Id}_E$.
$\diamond$ Soit $j \in \mathbb{N}_p$. $\varphi(x_j + iy_j) = 0$, donc
$u(x_j) + iv(x_j) = \varphi(x_j) = -i\varphi(y_j) = -i(u(y_j) + iv(y_j)) = v(y_j) - iu(y_j)$.
Ainsi, $u(x_j) = v(y_j) = v(\sigma(x_j))$ et $v(x_j) = -u(y_j) = -u \circ \sigma(x_j)$.
On a aussi $u(y_j) = -v(x_j) = v \circ \sigma(y_j)$ et $v(y_j) = u(x_j) = -u \circ \sigma(y_j)$.

Or deux endomorphismes sont égaux si et seulement si ils coïncident sur une base, donc $u = v \circ \sigma$ et $v = -u \circ \sigma$.

12°) c) On suppose qu'il existe un endomorphisme τ de E tel que $u = v \circ \tau$ et $v = -u \circ \tau$.
◇ Soit $\tau' \in L(E)$ tel que $u = v \circ \tau'$ et $v = -u \circ \tau'$.
Alors, pour tout $x \in E$, $v \circ \tau'(x) = v \circ \tau(x)$ et $u \circ \tau'(x) = u \circ \tau(x)$,
donc $(\tau' - \tau)(x) \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. Ceci montre que $\tau = \tau'$, ce qui prouve qu'il existe un unique $\tau \in L(E)$ tel que $u = v \circ \tau$ et $v = -u \circ \tau$.
◇ Soit $x \in E$.
$u(\tau \circ \tau(x) + x) = -v \circ \tau(x) + u(x) = -u(x) + u(x) = 0$ et
$v(\tau \circ \tau(x) + x) = u \circ \tau(x) + v(x) = -v(x) + v(x) = 0$,
donc $\tau \circ \tau(x) + x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Ainsi, $\tau \circ \tau = -Id_E$.
◇ Posons $\varphi = u' + iv'$.
Soit $x \in E$. $(i\varphi)(x) = i(u(x) + iv(x)) = -v(x) + iu(x) = u(\tau(x)) + iv(\tau(x))$, donc $(i\varphi(x)) = \varphi(\tau(x)) \in \varphi(E)$. Ainsi, $(i\varphi)(E) \subset \varphi(E)$.
De plus, $\varphi(x) = \varphi(\tau(-\tau(x))) = (i\varphi)(-\tau(x)) \in (i\varphi)(E)$, donc $(i\varphi)(E) = E$, ce qui prouve que $\varphi \in \mathcal{L}$.
Enfin, $\{0\} = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap E$, donc $\varphi \in \mathcal{L}_0$.