Résumé de cours :
Semaine 20 : du lundi 10 au vendredi 14 février.

Limite et continuité en un point (fin)

1 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose ici que $F = \mathbb{R}$.

Propriété : passage à la limite sur une inégalité *large* :
Si $\forall x \in A\ \ f(x) \leq g(x)$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l \leq l'$.

Principe du tunnel (pour des inégalités strictes) :
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a, $\alpha < f(x) < \beta$.

Corollaire. Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors $f|_A$ est bornée au voisinage de a.

Propriété. Principe des gendarmes.
Si $\forall x \in A\ \ h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_3(x)$, $h_1(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $h_3(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$, alors $h_2(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut adapter le principe des gendarmes au cas où $l = \pm\infty$.

2 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème de la limite monotone : Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$ et $f\ :\ ]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est croissante, alors $f(x) \underset{\substack{x\to M\\ x\in I}}{\longrightarrow} \sup_{y\in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{\substack{x\to m\\ x\in I}}{\longrightarrow} \inf_{y\in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f est décroissante, alors $f(x) \underset{\substack{x\to M\\ x\in I}}{\longrightarrow} \inf_{y\in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{\substack{x\to m\\ x\in I}}{\longrightarrow} \sup_{y\in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$ et $f\ :\ ]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application monotone. Pour tout $a \in I$, f possède en a une limite à droite, notée $f(a^+)$, et une limite à gauche, notée $f(a^-)$. De plus, si f est croissante, $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, et si f est décroissante, $f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+)$.
f est discontinue en a si et seulement si $f(a^+) \neq f(a^-)$ et dans ce cas $|f(a^+) - f(a^-)|$ s'appelle le saut de discontinuité de f en a.
Il faut savoir le démontrer.

Continuité globale

3 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Notation. Dans ce paragraphe, on fixe un intervalle I d'intérieur non vide.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue à valeurs réelles. Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
Ainsi, l'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème.
Une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème de la bijection :
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone.
f est une bijection de I dans $f(I)$ et $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est également **continue** et strictement monotone (de même sens de variation que f).
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Dans un tableau de variations, les flèches obliques signifient que l'application étudiée est continue et strictement monotone. Le théorème de la bijection affirme en particulier que toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes exactement une fois.

Définition. Soit E et F deux espaces métriques. $f : E \longrightarrow F$ est un homeomorphisme entre E et F si et seulement si f est une bijection telle que f et f^{-1} sont continues.
Deux espaces métriques sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme entre ces deux espaces.

4 Continuité et ouverts

Théorème. Soit E et F deux espaces métriques et soit $f : E \longrightarrow F$ une application définie sur $\mathcal{D}_f$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) f est continue. ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$. iii) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$.

Il faut savoir le démontrer.

5 Continuité d'une application linéaire

Notation. Dans ce paragraphe, E et F désignent 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Théorème. On suppose que $f \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est continue.
ii) f est continue en 0.
iii) f est bornée sur la boule unité de E.
iv) f est bornée sur la sphère unité de E.
v) $\exists k \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in E \ \ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.
vi) f est lipschitzienne.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On note $LC(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.
Pour tout $u \in LC(E,F)$, on pose $\|u\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F$.
Alors $LC(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
De plus, pour tout $u \in LC(E,F)$ et $x \in E$, $\|u(x)\|_E \leq \|u\|\|x\|_E$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Soit $u \in LC(E,F)$ et $v \in LC(F,G)$. Alors $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est de dimension finie, pour tout $f \in L(E,F)$, f est continue.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Les applications p-linéaires, où $p \in \mathbb{N}^*$, définies sur des espaces vectoriels de dimensions finies, sont continues.

Propriété. Les applications polynomiales à n indéterminées sont continues.

6 Continuité et compacité

Propriété (hors programme) : f est continue si et seulement si ses restrictions aux compacts de E inclus dans $\mathcal{D}_f$ sont continues.

Théorème. L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soient A un compact non vide de E et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe
$(x_m, x_M) \in A^2$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. L'image directe d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment.

Théorème. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Il faut savoir le démontrer.

7 La continuité uniforme

Notation. On fixe deux espaces métriques E et F ainsi qu'une application
$f : E \longrightarrow F$ définie sur $\mathcal{D}_f \subset E$.

Définition. f est uniformément continue sur $\mathcal{D}_f$ si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f^2 \ \ (d(x,y) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)$.

Propriété. Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme.
f est uniformément continue si et seulement si pour tout couple $((x_n),(y_n))$ de suites d'éléments de $\mathcal{D}_f$ tel que $d(x_n,y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $d(f(x_n),f(y_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.

Propriété. "lispchitzienne"$\Longrightarrow$"uniformément continue"$\Longrightarrow$"continue", mais les réciproques sont fausses.

Théorème de Heine : Toute application continue sur un compact est uniformément continue.
Il faut savoir le démontrer.

Comparaison au voisinage d'un point

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation. A est une partie d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Soit $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de a rencontre A.

Sauf mention du contraire, les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur A et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

8 La relation de domination

Définition. On dit que f est dominée par g au voisinage de a si et seulement si
(1) : $\exists V \in \mathcal{V}(a)\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in V \cap A\ \ \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$.
On note alors $f(x) = \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x))$ (notation de Landau) ou bien $f(x) \preceq g(x)$ (notation de Hardy).

Remarque. $f = \mathbf{O}(g)$ si et seulement si $\|f(x)\| = \mathbf{O}(\|g(x)\|)$.

Cas particulier des suites.
$x_n = \mathbf{O}(y_n)$ si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \forall n \geq N\ \ \|x_n\| \leq C\|y_n\|$.

Propriété. S'il existe V voisinage de a tel que $g(x)$ ne s'annule jamais sur V,
$f = \mathbf{O}(g)$ si et seulement si $x \longmapsto \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$ est bornée au voisinage de a.

Propriété. $\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$ (Il faut savoir le démontrer.), $\mathbf{O}(f) + \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(f)$,
Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $\mathbf{O}(\varphi).\mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\varphi.f)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{O}(f)^\alpha = \mathbf{O}(f^\alpha)$.

Propriété. Si $f(x) = \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x))$ et si $g(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} 0$.

Propriété. (Hors programme) Soient $(u_n),(v_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$.
S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N\ \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathbf{O}(v_n)$.
Il faut savoir le démontrer.

9 La relation de prépondérance

Définition. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si
(1) : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists V \in \mathcal{V}(a) \ \forall x \in V \cap A \ \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$.
On note alors $f(x) = \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{o} (g(x))$ (notation de Landau) ou bien $f(x) << g(x)$ (notation de Hardy).

Remarque. $f = o(g)$ si et seulement si $\|f(x)\| = o(\|g(x)\|)$.

Cas particulier des suites. $x_n = o(y_n)$ si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \|x_n\| \leq \varepsilon \|y_n\|$.

Propriété. S'il existe V voisinage de a tel que $g(x)$ ne s'annule jamais sur V,
$f = o(g)$ si et seulement si $\dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$.

Exemples. $f = o(1)$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$.

Exemple. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Alors en $+\infty$, $x^\alpha = o(x^\beta)$ et en 0^+, $x^\beta = o(x^\alpha)$.

Propriété. $o(f) = \mathbf{O}(f)$, $o(\mathbf{O}(f)) = o(f)$ et $\mathbf{O}(o(f)) = o(f)$ (donc aussi $o(o(f)) = o(f)$).
$o(f) + o(f) = o(f)$ (Il faut savoir le démontrer.),
Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $o(\varphi).\mathbf{O}(f) = o(\varphi.f)$ et $\mathbf{O}(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$ (donc aussi $o(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$).
Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $o(f)^\alpha = o(f^\alpha)$.