MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 18 : du lundi 3 mars au vendredi 7.

Liste des questions de cours

1°) Montrer que les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.

2°) Montrer que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

3°) Enoncer et démontrer une propriété reliant les notions d'intérieur et d'adhérence par passage au complémentaire.

4°) Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n / n \geq N\}}$.

5°) Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

6°) Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 - \sin(zy) \geq y^3\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

7°) Montrer que tout compact de E est fermé et borné. Montrer que la réciproque est vraie en dimension finie.

8°) Soit A une partie d'un espace métrique. On suppose que, pour tout ensemble I et pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ tels que $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie J finie de I telle que $A \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. Montrer que A est compact.

9°) Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, montrer que l'ensemble $\{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E.

Première partie

Révisions sur les séries

Les programmes précédents relatifs aux séries pourront faire l'objet d'exercices.

Deuxième partie

Topologie dans un espace métrique

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique (E, d) non vide.

1 Ouverts et fermés

Voisinage d'un point. On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
Intersection d'un nombre fini de voisinages.
Une partie contenant un voisinage est un voisinage.

U est ouvert si et seulement si U est voisinage de tous ses points.
Intersection finie d'ouverts, réunion quelconque d'ouverts.
Les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.

Les fermés sont les complémentaires des ouverts.
Intersection quelconque de fermés, réunion finie de fermés.
Les boules fermées (donc en particulier les singletons) sont des fermés.
Toute partie de E de cardinal fini est un fermé de E.

2 Adhérence et intérieur

Intérieur d'une partie A : $a \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

$A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Adhérence de A : $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(a) \;\; V \cap A \neq \emptyset]$.

$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\displaystyle\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n / n \geq N\}}$.

Points isolés, points d'accumulation d'une partie.

Les points adhérents de A sont les points de E situés à une distance nulle de A.

Une partie de E est dense si et seulement si elle rencontre toutes les boules ouvertes de E.
Une partie A de E est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.

La frontière de A est $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus \overset{\circ}{A})$.

3 Caractérisation par les suites

$a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.
Caractérisation séquentielle des fermés.
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est fermé.

4 Topologie induite sur une partie

Les boules, ouverts, fermés et voisinages pour la topologie induite sur A sont les traces sur A des boules centrées dans A, des ouverts, des fermés et des voisinages pour la topologie de E.
Si B est une partie de A, l'adhérence de B pour la topologie induite sur A est la trace sur A de l'adhérence de B pour la topologie globale sur E.
B est dense dans A si et seulement si $A \subset \overline{B}$.

5 Les compacts

Une partie A de E est compacte si et seulement si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.
Tout compact de E est fermé et borné.
Soit A un compact de E et $B \subset A$: B est compact si et seulement s'il est fermé.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.

Caractérisation de la compacité par la propriété de Borel Lebesgue : A est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.
Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors l'ensemble $\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Limite en un point d'une fonction, continuité.