# DM 35 : un corrigé

**Ce problème correspond au sujet Mines-Ponts 2007 MP, à quelques aménagements près.**

## 1 Préliminaires

**1°)** Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = T_k - T_{k-1}$, même lorsque $k = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k &= \sum_{k=n}^{m} u_k (T_k - T_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n}^{m} u_k T_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} u_{k+1} T_k \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m - u_n T_{n-1}.\end{aligned}$$

**2°)** Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n \, dt = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Soit $t \in [0, x]$. Alors $-t^2 \neq 1$, donc on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n = \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2} \, dt$, or $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \, dt = \arctan x$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + (-1)^N I_N$, en posant $\displaystyle I_N = \int_0^x \frac{(t^2)^{N+1}}{1 + t^2} \, dt$.

Or, par croissance de l'intégrale, lorsque $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq I_N \leq \int_0^x t^{2N+2} \, dt = \frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Lorsque $-1 \leq x \leq 0$, on a de même

$$0 \leq -I_N \leq \int_x^0 t^{2N+2} \, dt = -\frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, dans les deux cas, d'après le principe des gendarmes, $I_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \arctan x$, ce qu'il fallait démontrer.

**3°)** D'après la propriété $C$, $\chi(1)=\chi(1\times 1)=\chi(1)\chi(1)$, donc $\chi(1)\in\{0,1\}$.
Si $\chi(1)=0$, pour tout $a\in\mathbb{Z}$, $\chi(a)=\chi(a\times 1)=\chi(a)\chi(1)=0$, donc $\chi$ est nulle, ce qui est faux. Ainsi, $\chi(1)=1$.

**4°)** $\diamond$ Soit $k,h\in\mathbb{Z}$ tels que $\overline{k}=\overline{h}$. Alors il existe $\alpha\in\mathbb{Z}$ tel que $k=h+\alpha N$, or $\chi$ est $N$-périodique, donc $\chi(k)=\chi(h)$. Ainsi la quantité $\chi(k)$ ne dépend que de $\overline{k}$, ce qui permet bien de définir l'application $\widetilde{\chi}$.
De plus $\chi$ est non nulle, donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\chi(k)\neq 0$. Alors $\widetilde{\chi}(\overline{k})\neq 0$, donc $\widetilde{\chi}$ est également non nulle.
$\diamond$ Soit $\alpha\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Il existe $a\in\mathbb{Z}$ tel que $\alpha=\overline{a}$. D'après le cours, $a$ est premier avec $N$, donc d'après l'identité de Bezout, il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $ua+vN=1$. Alors $1=\chi(1)=\chi(ua+vN)=\chi(ua)=\chi(u)\chi(a)$, donc $\widetilde{\chi}(\alpha)=\chi(a)\neq 0$. On peut donc considérer la restriction $\widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$.
D'après la propriété C, on a immédiatement que,
pour tout $a,b\in\mathbb{Z}$, $\widetilde{\chi}(\overline{a}\times\overline{b})=\chi(ab)=\widetilde{\chi}(\overline{a})\times\widetilde{\chi}(\overline{b})$, donc $\widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

# 2 Cas particuliers

**5°)** On a vu que $\chi(1)=1$, or $\chi$ est 2-périodique, donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\chi(2n+1)=1$.
D'après la propriété A, $\chi(0)=0$, donc par 2-périodicité, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\chi(2n)=0$.
Ceci détermine entièrement l'application $\chi$.
Réciproquement, cette application vérifie bien les 4 axiomes de l'énoncé.

**6°)** $\chi(3)=\chi(-1)$. De plus, $\chi(-1)^2=\chi((-1)\times(-1))=\chi(1)=1$,
donc $\chi(3)=\chi(-1)\in\{1,-1\}$.

**7°)** $\diamond$ Soit $k\in\mathbb{Z}$.
$\chi(3)=-1$ et $\chi$ est 4-périodique, donc si $k\equiv 3\ [4]$, alors $\chi(k)=-1$.
De même, $\chi(1)=1$, donc si $k\equiv 1[4]$, alors $\chi(k)=1$.
Enfin, si $k\equiv 0\ [4]$ ou $k\equiv 2\ [4]$, alors $k$ et 4 ne sont pas premiers, donc d'après la propriété B, $\chi(k)=0$.
Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\chi(2k)=0$ et $\chi(2k+1)=(-1)^k$.
$\diamond$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, par sommation par paquets,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}=\sum_{0\le 2k\le n}\frac{\chi(2k)}{2k}+\sum_{0\le 2k+1\le n}\frac{\chi(2k+1)}{2k+1},$$
or $0\le 2k+1\le n \iff -\frac{1}{2}\le k\le\frac{n-1}{2}\iff 0\le k\le\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, donc
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\frac{\chi(2k+1)}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{2k+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$ d'après la question 2.

## 3 Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n}$

**8°)** D'après le cours, pour tout $k \in \{0,\ldots,N-1\}$, $\overline{k} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ si et seulement si $k$ est premier avec $N$, c'est-à-dire si et seulement si $k \in P$.

Ainsi, $\overline{\displaystyle\prod_{k\in P} ak} = \displaystyle\prod_{k\in P} \overline{a}\overline{k} = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x$.

Mais $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, donc l'application $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \\ x & \longmapsto & \overline{a}x \end{array}$ est une bijection, dont la bijection réciproque est $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \\ x & \longmapsto & \overline{a}^{-1}x \end{array}$. Ainsi, par changement de variable, on obtient que $\displaystyle\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, c'est-à-dire, en tenant compte du fait que $\varphi(N) = |P| = |(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*|$, $\overline{a}^{\varphi(N)}\Big(\displaystyle\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x\Big) = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, donc, en multipliant par l'inverse de ce produit (dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$), on obtient que $\overline{a}^{\varphi(N)} = 1$. Ainsi, $a^{\varphi(N)} \equiv 1\ [N]$, ce qu'il fallait démontrer.

**9°)** D'après la question 4, en notant $f = \widetilde{\chi}|^{\mathbb{R}^*}_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}$, on peut écrire :
$1 = \chi(1) = \widetilde{\chi}(\overline{1}) = f(\overline{1}) = f(\overline{a}^{\varphi(N)}) = f(\overline{a})^{\varphi(N)}$, car $f$ est un morphisme de groupes, or $f(\overline{a}) \in \mathbb{R}^*$, donc $f(\overline{a}) \in \{-1,1\}$. Mais $f(\overline{a}) = \widetilde{\chi}(\overline{a}) = \chi(a)$, donc $|\chi(a)| = 1$.

**10°)** On adopte un raisonnement analogue à la question 8 :
D'après la propriété B, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k\in P} \chi(ak)$, donc en posant toujours $f = \widetilde{\chi}|^{\mathbb{R}^*}_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k\in P} f(\overline{a}\overline{k}) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(\overline{a}x)$. Alors par le même changement de variables qu'en question 8, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(x)$, mais le calcul que l'on vient d'écrire prouve, avec $a = 1$, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(x)$, donc on a bien montré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$.

**11°)** $\diamond$ Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a)\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$. En choisissant $a$ tel que $\chi(a) \neq 1$, ce qui est possible d'après l'énoncé, on obtient que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$, donc $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{n+1} - x_n = \chi(n+N) - \chi(n) = 0$ d'après la propriété D. Ainsi, la suite $(x_n)$ est constante et $x_0 = 0$, donc elle est identiquement nulle. Ceci démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0$.

**12°)** Par division euclidienne de $m$ par $N$, il existe $q, h \in \mathbb{N}$ tels que $m = qN + h$ avec $0 \leq h \leq N-1$. Alors, par sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \chi(k) &= \sum_{k=0}^{m} \chi(k) \\ &= \sum_{k=0}^{qN-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k)\end{aligned}$$

or d'après la question précédente, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) = 0$,

donc $\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=qN}^{qN+h} \chi(k) = \sum_{k=0}^{h} \chi(k)$, par $N$-périodicité de $\chi$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=1}^{h} \chi(k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq h \\ k \in P}} \chi(k)$ (d'après la propriété B). Alors, par inégalité triangulaire, $\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq h \\ k \in P}} |\chi(k)| \leq \sum_{k \in P} |\chi(k)|$, mais d'après la question 9, pour tout $k \in P$, $|\chi(k)| = 1$, donc $\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq |P| = \varphi(N)$.

**13°)** $\diamond$ D'après la question 12, $T_n = \mathbf{O}(1)$, or $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $T_n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \mathbf{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$. On sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geq 1} T_n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$ est absolument convergente.

$\diamond$ Afin d'utiliser la question 1, posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = \chi(k)$ et $u_k = \frac{1}{k}$. Posons également $\alpha_0 = 0 = \chi(0)$ et $u_0 = 0$.

Alors, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = -u_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(u_k - u_{k+1}) + u_n T_n$.

$T_0 = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = \frac{T_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big)$.

La suite $(T_n)$ est bornée d'après la question précédente, donc $\displaystyle\frac{T_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} T_n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$ est absolument convergente, donc elle converge. On en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}$ est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

# 4 Comportement asymptotique

**14°)** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $D_k$ l'ensemble des entiers naturels qui divisent $k$.
Notons $n = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_1} p^{v_p}$ et $m = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_2} p^{v_p}$ les décompositions de $n$ et $m$ en produit de nombres premiers, où $\mathbb{P}_1$ (respectivement : $\mathbb{P}_2$) désigne l'ensemble des nombres premiers qui divisent $n$ (respectivement $m$). $n$ et $m$ sont premiers entre eux, donc $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 = \emptyset$.
Soit $a \in D_{nm}$. Alors on sait que la décomposition de $a$ en produit de nombres premiers est de la forme $a = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_1\cup\mathbb{P}_2} p^{k_p}$, où pour tout $p \in \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$, $0 \leq k_p \leq v_p$. Ainsi, en posant $b = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_1} p^{k_p}$ et $c = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_2} p^{k_p}$, on peut affirmer que $a = bc$ avec $b \in D_n$ et $c \in D_m$.
Réciproquement, il est évident que si $b \in D_n$ et $c \in D_m$, alors $bc$ est un diviseur de $nm$.
En résumé, $D_{nm} = \{bc \ / \ b \in D_n \text{ et } c \in D_m\}$, donc l'application $\begin{array}{ccc} D_n \times D_m & \longrightarrow & D_{nm} \\ (b,c) & \longmapsto & bc \end{array}$ est une surjection. C'est même une bijection, car si $bc = b'c'$ avec $b, b' \in D_n$ et $c, c' \in D_m$, alors $b \mid b'c'$ et $b \wedge c' = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, $b \mid b'$. De même on établit que $b' \mid b$, donc $b = b'$, puis $c = c'$.
En utilisant cette bijection pour effectuer un changement de variables, on obtient $f_{nm} = \displaystyle\sum_{a\in D_{nm}} \chi(a) = \sum_{(b,c)\in D_n\times D_m} \chi(bc) = \sum_{b\in D_n}\sum_{c\in D_m} \chi(b)\chi(c)$, d'après la propriété C.
Ainsi, par distributivité généralisée, $f_{nm} = \Big(\displaystyle\sum_{b\in D_n} \chi(b)\Big) \times \Big(\sum_{c\in D_m} \chi(c)\Big) = f_n f_m$.

**15°)** $p$ étant premier, les diviseurs de $p^\alpha$ sont les $p^\beta$ avec $0 \leq \beta \leq \alpha$.
Ainsi, $f_{p^\alpha} = \displaystyle\sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p^\beta)$. De plus, pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, $\chi(p^\beta) = \chi(p)^\beta$, donc $f_{p^\alpha} = \displaystyle\sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p)^\beta$.
D'après la question 9, $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$.
Si $\chi(p) = 1$, alors $f_{p^\alpha} = \alpha + 1$.
Si $\chi(p) = 0$, alors $f_{p^\alpha} = 1$.

Il reste le cas où $\chi(p) = -1$. Alors $f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta = \frac{1-(-1)^{\alpha+1}}{1-(-1)}$. Cette quantité est nulle lorsque $\alpha$ est impair et elle vaut 1 lorsque $\alpha$ est pair.

En résumé, $f_{p^\alpha} = \begin{cases} \alpha+1 & \text{si } \chi(p) = 1 \\ 1 & \text{si } \chi(p) = 0 \\ 0 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases}$.

**16°)** Comme $n$ possède au plus $n$ diviseurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi(k) \leq 1$, on obtient que $f_n \leq n$.

La décomposition de $n$ en produit de nombres premiers s'écrit : $n = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i}$, où les $p_i$ sont des nombres premiers distincts et les $\alpha_i$ des entiers au moins égaux à 1. D'après la question 14, généralisée par récurrence à un produit d'un nombre fini d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux, comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, $f_n = \prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{\alpha_i}}$. Or d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $f_{p^\alpha} \geq 0$, donc $f_n \geq 0$.

**17°)** Reprenons les notations de la question précédente. Alors $f_{n^2} = \prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{2\alpha_i}}$. Or, à la question 15, avec $\alpha$ pair, quelle que soit la valeur de $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$, $f_{p^\alpha} > 0$. Donc $f_{n^2} > 0$. Or $f_{n^2}$ est dans $\mathbb{Z}$, $f_{n^2} \geq 1$.

**18°)** $\diamond$ Supposons que $|x| > 1$. Alors$|f_{n^2} x^{n^2}| \geq |x|^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc d'après le principe des gendarmes, $f_{n^2} x^{n^2}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $f_n x^n$ ne tend pas vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc d'après le cours, la série $\sum_{n\geq 1} f_n x^n$ est divergente.

$\diamond$ Supposons maintenant que $|x| < 1$.

D'après la question 16, $|f_n x^n| = \mathbf{O}(n|x|^n)$, donc $|f_n x^n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car, d'après les croissances comparées, $n^3|x|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci montre que la série $\sum_{n\geq 1} f_n x^n$ est absolument convergente, donc elle converge.

**19°)** Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n x^n \geq 0$, donc $\sum_{n=1}^{M^2} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{M} f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{M} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{M} g(n)$, si l'on pose, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $g(t) = x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$. $g$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, car $\ln x < 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on a donc : $g(n) = \int_n^{n+1} g(n)\ dt \geq \int_n^{n+1} g(t)\ dt$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{M^2} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{M} \int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{M+1} g(t)\ \mathrm{d}t$.

Effectuons le changement de variable $u = t\sqrt{-\ln x}$ :

$\displaystyle\int_1^{M+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$, car $-\ln x \leq \ln 2$.

Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{M^2} f_n x^n \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$.

La suite $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u\right)_{M \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée, or elle est croissante, donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$ et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq L$.

De plus l'application $h : A \longmapsto \displaystyle\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{A} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$, de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, il existe $L' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $h(A) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} L'$. Alors par composition des limites, $h((M+1)\sqrt{-\ln x}) \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} L'$, mais on vient de voir que $h((M+1)\sqrt{-\ln x}) \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} L$, donc par unicité de la limite $L' = L$.

On a donc montré que $f(x) \geq L' = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \lim_{A \to +\infty} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{A} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$.