

DM 37 : Corrigé

Première partie :

1) $0 \leq P_{n+1} = P_n \times u_{n+1} \leq P_n$, car $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, donc la suite (P_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. Ainsi, le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

2) D'après la question précédente, tous ces produits existent.

$$\diamond \text{ Soit } N \geq 2. \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n} = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\text{donc } \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$\diamond \text{ Soit } N \geq 2. \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{n=2}^N \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{\frac{(N+1)!}{2} \times (N-1)!}{(N!)^2},$$

$$\text{donc } \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{N+1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}, \text{ donc } \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\diamond \text{ Soit } N \geq 2. \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \prod_{n=2}^N \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)},$$

$$\text{donc } \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{\frac{(N+2)!}{6} \times (N-1)!}{N! \times \frac{(N+1)!}{2}} = \frac{1}{3} \frac{N+2}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ainsi, } \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

3) a) Soit $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \times \frac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}}, \text{ or } e^t - e^{-t} = (e^{t/2} + e^{-t/2})(e^{t/2} - e^{-t/2}),$$

$$\text{donc } \frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = \frac{(e^{t/2} + e^{-t/2})^2}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^t + e^{-t} + 2}{e^t + e^{-t}} = 1 + \frac{1}{\text{ch}t}.$$

b)

\diamond On sait que l'application ch est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$, or $x > 1$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v_1 = \text{ch}\theta$.

◇ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $R(n)$ l'assertion : $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$.

Pour $n = 1$, $R(1)$ est claire.

Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$.

$v_{n+1} = 2v_n^2 - 1 = 2\text{ch}^2(2^{n-1}\theta) - 1 = \text{ch}(2^n\theta)$, d'où $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$.

◇ Soit $N \geq 2$. $\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) = \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{\text{ch}(2^{n-1}\theta)}\right) = \prod_{n=1}^N \frac{\text{th}(2^{n-1}\theta)}{\text{th}(2^{n-2}\theta)} = \frac{\text{th}(2^{N-1}\theta)}{\text{th}(\theta/2)}$,

or $\theta > 0$, donc $2^{n-1}\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ puis $\text{th}(2^{n-1}\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{v_n}\right)$ existe et

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{\text{th}(\theta/2)}.$$

◇ De plus $\text{cht} = 2\text{ch}^2 \frac{t}{2} - 1$, donc $2\text{ch}^2 \frac{\theta}{2} = \text{ch}\theta + 1 = x + 1$. Ainsi, $\text{ch} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

De même, $\text{cht} = 1 + 2\text{sh}^2 \frac{t}{2}$, donc $\text{sh} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$.

En conclusion $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

4) a) On suppose que $\sum u_n^2$ converge.

◇ $\sum u_n$ converge, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ln(1 + u_n) - u_n = -\frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2) \sim -\frac{1}{2}u_n^2$,

or $-\frac{1}{2}u_n^2$ est une suite de signe constant et $\sum u_n^2$ converge,

donc la série $\sum (\ln(1 + u_n) - u_n)$ converge.

◇ $\ln \left(\prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right) = \sum_{n=0}^N \ln(1 + u_n) = \sum_{n=0}^N [\ln(1 + u_n) - u_n] + \sum_{n=0}^N u_n$. Or les séries $\sum [\ln(1 + u_n) - u_n]$ et $\sum u_n$ convergent, donc il existe $L \in \mathbb{R}$

tel que $\ln \left(\prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L$. Alors, par continuité de la fonction exponentielle,

$$\prod_{n=0}^N (1 + u_n) = \exp \left(\ln \left(\prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^L \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ceci montre que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe et qu'il appartient à \mathbb{R}_+^* .

b) On a encore $\ln(1 + u_n) - u_n \sim -\frac{1}{2}u_n^2$ or $-\frac{1}{2}u_n^2 < 0$ et c'est maintenant le terme général d'une série divergente, donc $\sum [\ln(1 + u_n) - u_n]$ est aussi une série divergente dont le terme général est négatif à partir d'un certain rang.

Alors, d'après le cours, $\sum_{n=0}^N [\ln(1 + u_n) - u_n] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty$.

Ainsi, $\ln \left(\prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right) = \sum_{n=0}^N \ln(1 + u_n) = \sum_{n=0}^N [\ln(1 + u_n) - u_n] + \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty,$

donc en passant à l'exponentielle, $\prod_{n=0}^N (1 + u_n) = \exp \left(\ln \left(\prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$

Ceci montre que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe et qu'il vaut 0.

c)

◇ Posons $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Pour tout $n \geq 2$, $|u_n| < 1$. De plus la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 2}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

De plus, $u_n^2 = \frac{1}{n}$, donc la série $\sum u_n^2$ diverge. On peut donc appliquer le b), ce qui montre que $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ existe et qu'il vaut 0.

◇ Posons maintenant $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Pour tout $n \geq 2$, $|u_n| < 1$. De plus la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 2}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

De plus, $u_n^2 = \frac{1}{n^2}$, donc la série $\sum u_n^2$ converge. On peut donc appliquer le a), ce qui montre que $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ existe.

Soit $N \geq 1$. $\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \times \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)$, donc

$$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \prod_{k=1}^N \frac{2k-1}{2k} \times \prod_{k=1}^{N-1} \frac{2k+2}{2k+1} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{2k+1}{2k+2} \times \prod_{k=1}^{N-1} \frac{2k+2}{2k+1} = \frac{1}{2}, \text{ mais}$$

$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$, donc

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Seconde partie :

1) a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(t) = \sin t - \frac{2t}{\pi}$.

$f'(t) = -\frac{2}{\pi} + \cos t$ et $f''(t) = -\sin t < 0$ (lorsque $0 < t < \frac{\pi}{2}$).

Ainsi, f' est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or $f'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$, donc il existe un unique $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f'(t_0) = 0$.

Alors f est croissante entre 0 et t_0 , or $f(0) = 0$, donc f est positive entre 0 et t_0 , puis f décroît entre t_0 et $\frac{\pi}{2}$, mais $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc f est encore positive entre t_0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{2n} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{2n+1}, \text{ donc}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

c) Fixons $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

\sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha]$, $\sin t \leq \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Ainsi,

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt} \leq \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) [\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)]^{2n} \times \frac{2(2n+1)}{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ d'après les croissances}$$

comparées, car $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \in [0, 1[$, ce qu'il fallait démontrer.

d) Fixons $\varepsilon > 0$. φ étant continue en $\frac{\pi}{2}$, et $\frac{\varepsilon}{2}|\varphi(\frac{\pi}{2})|$ étant dans \mathbb{R}_+^* , il existe $\alpha > 0$ (avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$) tel que, pour tout $x \in [\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}]$, $|\varphi(x) - \varphi(\frac{\pi}{2})| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\varphi(\frac{\pi}{2})|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $x_n = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)(\sin t)^{2n} dt - \varphi(\frac{\pi}{2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \right|$.

Par inégalité triangulaire, $0 \leq x_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t) - \varphi(\frac{\pi}{2})| (\sin t)^{2n} dt$,

donc $x_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (|\varphi(t)| + |\varphi(\frac{\pi}{2})|) (\sin t)^{2n} dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{2} |\varphi(\frac{\pi}{2})| (\sin t)^{2n} dt$,

or φ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\varphi(t)| \leq M$. Ainsi,

$x_n \leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt + \frac{\varepsilon}{2} |\varphi(\frac{\pi}{2})| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$, mais d'après la question précédente,

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt \leq \frac{\varepsilon}{4M} |\varphi(\frac{\pi}{2})| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $x_n \leq \varepsilon |\varphi(\frac{\pi}{2})| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$, ce qu'il fallait démontrer.

2)a) Effectuons une intégration par parties :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-1} \sin t dt = [-\cos t (\sin t)^{2n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (2n-1) (\sin t)^{2n-2} dt, \text{ donc}$$

$$I_n = (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin t)^2) (\sin t)^{2n-2} dt = (2n-1)(I_{n-1} - I_n), \text{ ainsi } I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

b)

◇ Par une récurrence simple, on montre que $I_n = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = I_0 \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{2^n (n!)}$, puis

en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\prod_{k=1}^n (2k)$,

$$\text{on obtient } I_n = \frac{(2n)!}{(2^n(n!))^2} \frac{\pi}{2}.$$

◇ D'après la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$,

$$\text{donc } I_n \sim \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{2^{2n} 2\pi n n^{2n} e^{-2n}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\pi}{2}, \text{ donc } I_n \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

$$\mathbf{3 a)} \int_0^{p\pi} e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{p\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2p\pi} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

b) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^{p\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt \leq \int_0^{p\pi} e^{-2t} dt \leq \frac{1}{2}$, d'après le calcul précédent,

donc la suite $\left(\int_0^{p\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est majorée. De plus elle est croissante car

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt \geq 0. \text{ Elle est donc convergente.}$$

c) Fixons k et n dans \mathbb{N} . Le changement de variable $t = x + k\pi$ donne :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt = \int_0^\pi e^{-2(x+k\pi)} (\sin x)^{2n} dx,$$

$$\text{donc } \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2k\pi} e^{-2x} (\sin x)^{2n} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-2k\pi} e^{-2x} (\sin x)^{2n} dx.$$

Dans la seconde intégrale, posons $x = \pi - t$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt = e^{-2k\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} (\sin x)^{2n} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2(\pi-t)} (\sin t)^{2n} dt \right), \text{ ce qui}$$

répond à la question en posant $\varphi(t) = e^{-2t} + e^{-2\pi} e^{2t}$.

d) Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=0}^N \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt = \int_0^{(N+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_n, \text{ donc la série de terme}$$

général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt$ est convergente et sa somme vaut u_n . Ainsi, d'après la

question précédente, $u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) (\sin x)^{2n} dx$, or $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k\pi} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}}$, donc

$$u_n = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) (\sin x)^{2n} dx. \text{ Or } \varphi \text{ est une application continue}$$

et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 2e^{-\pi} \neq 0$, donc d'après la question 1.d, $u_n \sim \frac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} dx$, puis

$$\text{d'après la question 2.b, } u_n \sim \frac{2}{e^\pi - e^{-\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

4 a) Soit $n \geq 1$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n} dt &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}(\sin t)^{2n}\right]_0^{p\pi} + \int_0^{p\pi} \frac{1}{2}e^{-2t}2n \cos t(\sin t)^{2n-1} dt \\ &= n \int_0^{p\pi} e^{-2t} \cos t(\sin t)^{2n-1} dt,\end{aligned}$$

donc en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient que $u_n = n \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} e^{-2t}(\cos t)(\sin t)^{2n-1} dt$.

b) Soit $n \geq 1$. Effectuons une seconde intégration par parties.

$$\begin{aligned}n \int_0^{p\pi} e^{-2t} \cos t(\sin t)^{2n-1} dt &= \left[-n\frac{1}{2}e^{-2t} \cos t(\sin t)^{2n-1}\right]_0^{p\pi} \\ &\quad + \frac{n}{2} \int_0^{p\pi} e^{-2t}(-\sin t(\sin t)^{2n-1} + (2n-1)(\cos t)^2(\sin t)^{2n-2}) dt,\end{aligned}$$

donc en faisant tendre p vers $+\infty$, et en remplaçant $(\cos t)^2$ par $1 - (\sin t)^2$, on obtient :

$$u_n = -\frac{n}{2}u_n + \frac{1}{2}n(2n-1)(u_{n-1} - u_n),$$

$$\text{donc } \frac{n(2n-1)}{2}u_{n-1} = (1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}(2n-1))u_n = (1 + n^2)u_n,$$

$$\text{puis } n(2n-1)u_{n-1} = 2(1 + n^2)u_n.$$

c) On a donc, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{2n(2n-1)}{4(1+n^2)}u_{n-1}$, donc par récurrence sur n , on

$$\text{peut montrer que pour tout } n \geq 0, u_n = \frac{(2n)!}{4^n \prod_{k=1}^n (1+k^2)} u_0.$$

$$\text{De plus, } u_0 = \frac{1}{2} \text{ (cf 3.a) et d'après la question 2.b, } I_n = \frac{(2n)!}{(2^n(n!))^2} \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ou bien } \frac{(n!)^2 I_n}{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n} u_0, \text{ donc } u_n = \frac{(n!)^2 I_n}{\pi \prod_{k=1}^n (1+k^2)}.$$

d) Alors, d'après les questions 3.d puis 2.b,

$$\frac{1}{2\text{sh}\pi} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sim u_n \sim \frac{(n!)^2}{2\sqrt{\pi n} \prod_{k=1}^n (1+k^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n} \prod_{k=1}^n \frac{1+k^2}{k^2}}, \text{ donc } \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{\text{sh}(\pi)}{\pi}, \text{ ce}$$

$$\text{qui prouve que } \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \text{ existe et que } \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\text{sh}\pi}{\pi}.$$

Troisième partie :

$$1) \text{ Si } N \geq 1, \prod_{n=1}^N \left|1 + \frac{i}{n}\right| = \prod_{n=1}^N \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\text{sh}(\pi)}{\pi}}, \text{ ce qui prouve}$$

$$\text{que } \prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right| \text{ existe et vaut } \sqrt{\frac{\text{sh}(\pi)}{\pi}}.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $R(n)$ l'assertion :

$$\text{pour tout } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \left| -1 + \prod_{k=1}^n (1 + z_k) \right| \leq -1 + \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|).$$

Pour $n = 1$, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $|(1 + z_1) - 1| = |z_1| = (1 + |z_1|) - 1$, ce qui prouve $R(1)$.

Pour $n = 2$, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$|(1 + z_1)(1 + z_2) - 1| = |z_1 + z_2 + z_1 z_2| \leq |z_1| + |z_2| + |z_1 z_2| = (1 + |z_1|)(1 + |z_2|) - 1,$$

ce qui prouve $R(2)$.

Pour $n \geq 2$, supposons $R(n)$. Soit $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$.

$$-1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) = -1 + (1 + z_{n+1}) \left(-1 + \prod_{k=1}^n (1 + z_k) \right) = -1 + (1 + Z_1)(1 + Z_2),$$

en posant $Z_1 = z_{n+1}$ et $Z_2 = -1 + \prod_{k=1}^n (1 + z_k)$, donc d'après $R(2)$,

$$\left| -1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) \right| \leq -1 + (1 + |Z_1|)(1 + |Z_2|), \text{ mais d'après } R(n), |Z_2| \leq -1 + \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|),$$

$$\text{donc } \left| -1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) \right| \leq -1 + (1 + |z_{n+1}|) \left(-1 + \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) \right) = -1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |z_k|),$$

ce qui prouve $R(n + 1)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$ et $Q_n = \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|)$. D'après la question

4 de la première partie appliquée à la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui est possible car $|u_n| < 1$ et $\sum |u_n|$ converge, la suite (Q_n) converge, donc c'est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $q \in \mathbb{N}$, $|Q_{n+q} - Q_n| \leq \varepsilon$.

Soit $n \geq N$ et $q \in \mathbb{N}$.

$$|P_{n+q} - P_n| = |P_n| \left| -1 + \prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + u_k) \right|, \text{ et } |P_n| \leq Q_n, \text{ donc d'après la question 2,}$$

$$|P_{n+q} - P_n| \leq Q_n \left(-1 + \prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + |u_k|) \right) = Q_{n+q} - Q_n \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la suite (P_n) est une suite de Cauchy, donc elle converge vers un complexe, ce qu'il fallait démontrer.

4) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=0}^N u_n = \exp\left(i \sum_{n=0}^N \theta_n\right)$.

◇ Supposons que $\sum \theta_n$ converge. Alors $\prod_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \exp\left(i \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n\right)$, ce qui prouve que

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ existe.}$$

◇ Réciproquement, supposons que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left| \prod_{n=0}^N u_n \right| = 1$ et l'application $|\cdot|$ est continue sur \mathbb{C} , donc en passant à la limite, $\left| \prod_{n=0}^{+\infty} u_n \right| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = e^{i\theta}$.

Par hypothèse, $\exp\left(i\left(\sum_{n=0}^N u_n - \theta\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_N \in [-\pi, \pi[$ et $k_N \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{n=0}^N \theta_n - \theta = \varepsilon_N + 2k_N\pi$.

Ainsi, $e^{i\varepsilon_N} = \exp\left(i\left(\sum_{n=0}^N u_n - \theta\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit que $\sin \varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et $\cos \varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, $\cos \varepsilon_N > 0$, ainsi pour tout $N \geq N_0$, $\varepsilon_N \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Pour $N \geq N_0$, $\varepsilon_N = \arcsin(\sin \varepsilon_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $N \in \mathbb{N} : k_N = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^N \theta_n - \theta - \varepsilon_N \right)$, donc $k_{N+1} - k_N = \frac{1}{2\pi} (\theta_{N+1} + \varepsilon_N - \varepsilon_{N+1})$.

$\varepsilon_N - \varepsilon_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_1$, $|\varepsilon_N - \varepsilon_{N+1}| \leq \frac{\pi}{2}$.

Soit $N \geq N_1 : |k_{N+1} - k_N| \leq \frac{|\theta_{N+1}|}{2\pi} + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$, car $\theta_{N+1} \in [-\pi, \pi]$.

Or $k_{N+1} - k_N \in \mathbb{Z}$, donc $k_{N+1} = k_N$. On en déduit que pour tout $N \geq N_1$, $k_N = k_{N_1}$.

Ainsi $\sum_{n=0}^N \theta_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \theta + 0 + 2k_{N_1}\pi$, ce qui prouve que $\sum \theta_n$ converge.

5) Supposons que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ existe.

Alors d'après 1, $\prod_{n=1}^N \frac{1 + \frac{i}{n}}{|1 + \frac{i}{n}|} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{i}{n})}{\prod_{n=1}^{+\infty} |1 + \frac{i}{n}|}$.

Ainsi, en posant $u_n = \frac{1 + \frac{i}{n}}{|1 + \frac{i}{n}|}$, $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$. Posons $u_n = e^{i\theta_n}$ où $\theta_n \in]-\pi, \pi[$. D'après III.4, $\sum \theta_n$ converge. Mais $\tan \theta_n = \frac{1}{n}$ et $\theta_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ car $\operatorname{Re}(u_n) > 0$.

Ainsi $\theta_n = \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ converge, ce qui est faux.

On a donc montré par l'absurde que $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{i}{n})$ n'existe pas.