

DM 40 : Moyennes de Cesaro.

Lorsque $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on note $C(x)$ la suite $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad y_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x_j.$$

Partie I : Premiers exemples.

1°) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = e^{ik\theta}$ et $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Montrer que x n'est pas une suite convergente et que $C(x)$ est une suite convergente.

2°) Soit n un entier avec $n \geq 2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente et que $C(x)$ est une suite convergente.

Partie II : endomorphismes induits par C .

3°) Montrer que C est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées de complexes.

4°) Montrer que ℓ^∞ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ x & \longmapsto & C(x) \end{array}$ est un endomorphisme.

5°) Pour tout $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, on pose $\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

Montrer qu'on définit ainsi une norme sur ℓ^∞ .

6°) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ x & \longmapsto & C(x) \end{array}$ est continue

et calculer la quantité $\sup_{\substack{x \in \ell^\infty \\ \|x\| \leq 1}} \|C(x)\|$.

7°) Soient $\sum a_n$ une série de complexes et $\sum b_n$ une série de réels positifs. On suppose que la série $\sum b_n$ est divergente.

Si $a_n = o(b_n)$, montrer que $\sum_{k=0}^n a_k = o\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)$.

Notons E l'ensemble des suites convergentes de complexes. C'est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ (on ne demande pas de le démontrer).

8°) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum p_n$ diverge.

Montrer que $\frac{\sum_{j=0}^n p_j x_j}{\sum_{j=0}^n p_j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

En déduire que $\begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & C(x) \end{matrix}$ est un endomorphisme.

9°) Montrer que ℓ^∞ est un espace de Banach.

Partie III : valeurs d'adhérence

10°) Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$. Montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite x si et seulement si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - a| < \varepsilon$.

11°) Soit $x \in \ell^\infty$. On pose $C(x) = y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|y_k - y_{k-1}| \leq \frac{2\|x\|}{k+1}$.

12°) En déduire que si x est une suite de ℓ^∞ à valeurs réelles, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $C(x)$ est un intervalle.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \sum_{h=1}^p h!$ et $v_p = \sum_{h=1}^p (2h-1)!$.

On convient que $u_0 = v_0 = 0$.

13°) Montrer que $u_n \sim n!$ et que $v_n \sim (2n-1)!$.

14°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $j(k) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{j(k)} \leq k < u_{j(k)+1}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } j(k) \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi, les premières valeurs de la

suite $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, (24 fois), 1, 1, 1, 1, (120 fois)...

On pose à nouveau $C(x) = y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

15°) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer y_{u_p-1} .

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites x et $C(x)$.

Partie IV : Convergence simple des itérés

16°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers un complexe ℓ .

Soit β un réel tel que $0 < \beta < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{j=0}^n \beta^j a_{n-j}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{1 - \beta}$.

17°) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de complexes, soit $\beta \in]0, 1[$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

On suppose que $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \beta v_n + w_n$.

Montrer que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{1 - \beta}$.

Soit $x \in \ell^\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^{(n)} = C^n(x)$, où C^n désigne la composée de C avec elle-même n fois. En particulier, $x^{(0)} = x$ et $x^{(1)} = C(x)$.

Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on notera $x_{n,k}$ la k -ème composante de la suite $x^{(n)}$.

18°) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

19°) Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que $x_0 = 0$ et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$,

où ℓ est un complexe non nul.

Montrer que la suite $C^n(x)$ est divergente dans l'espace vectoriel normé ℓ^∞ .