Équations différentielles

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. On fixe deux applications continues a et b de I dans $\mathbb{K}$.
On considère les équations différentielles suivantes en l'inconnue y :
$(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$.
(E) est la forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (H) est son équation homogène associée. On dit aussi que (H) est l'équation sans second membre (ESSM).

Définition. On dit que y est une solution de (E) si et seulement si y est une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $t \in I$, $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$.
Dans ce cas, le graphe de y est appelé une courbe intégrale de (E).

Remarque. Cette équation différentielle est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée d'ordre 1 et non les dérivées d'ordres supérieurs.

Remarque. Il s'agit bien d'une équation linéaire. En effet,
si l'on note $D^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$, l'équation (E) peut s'écrire : $f(y)=b$, où $\begin{array}{cccc} f : & D^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) \\ & y & \longmapsto & y'-a.y \end{array}$.
f est bien une application linéaire.
En particulier, l'ensemble des solutions de (H) est égal à $\mathrm{Ker}(f)$, donc c'est un sous-espace vectoriel : si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H), pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $t\longmapsto \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ est encore une solution de (H).

Exemple. $t\longmapsto e^t$ est une solution de l'équation différentielle $y'=y$.
$t\longmapsto e^{(t^2)}+1$ est une solution de l'équation différentielle $y'=2ty-2t$.

Exemple. L'équation différentielle régissant la vitesse v d'une masse chutant dans un fluide (très) visqueux est du type $v'+\lambda v^2=g$ où λ est une grandeur physique (en m^{-1}) et où g est l'accélération de la pesanteur. Ce n'est pas une équation différentielle linéaire !

Définition. Soit $y_0\in\mathbb{K}$ et $t_0\in I$.
Le problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0,y_0) consiste en la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0)=y_0$.

Exemple. $t\longmapsto e^{(t^2)}+1$ est une solution du problème de Cauchy relatif à l'équation $y'=2ty-2t$ et à la condition initiale $y(0)=2$.

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E=\{y_0+y/y\in S_H\}\stackrel{\Delta}{=}y_0+S_H$. On dit que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

Démonstration.
C'est un cas particulier de la propriété sur les équations linéaires énoncée en page 12 du chapitre sur la structure d'espace vectoriel. □

Théorème. Notons A une primitive de a. Alors

$$\boxed{y'=a(t)y \Longleftrightarrow [\exists\lambda\in\mathbb{K}\quad \forall t\in I\quad y(t)=\lambda e^{A(t)}].}$$

Ainsi, S_H est un espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle.

Démonstration.
Soit y une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. Notons z l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie par $\forall t\in I\quad z(t)=y(t)e^{-A(t)}$.
z est dérivable et $\forall t\in I\quad z'(t)=e^{-A(t)}(y'(t)-a(t)y(t))$.
Ainsi $(H)\Longleftrightarrow z'=0\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{K}\quad\forall t\in I\quad z(t)=\lambda$. Donc
$(H)\Longleftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{K}\quad\forall t\in I\quad y(t)=\lambda e^{A(t)}$. □

Exemple. En dynamique des populations, le modèle de Malthus (1798) décrit la vitesse de croissance d'une population lorsqu'elle est de taille raisonnable et placée dans des conditions idéales : espace illimité, nourriture suffisante, absence de prédateurs,

résistance aux maladies ... En notant $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant t, le taux de croissance est alors proportionnel à la population, ce qui donne l'équation différentielle suivante : $(H)\ :\ N'(t) = rN(t)$, où $r > 0$ représente le taux de croissance relatif.
En réalité, l'application N n'est pas dérivable : elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et elle est discontinue à chaque instant où l'effectif de la population est modifié. Cependant, pendant un temps dt, si la population croît proportionnellement à son effectif, on peut approcher $N(t+dt) - N(t)$ par rdt, donc il est raisonnable d'approcher N par une application dérivable, que l'on note encore N, et qui vérifie l'équation (H) précédente.
La solution de (H) est $N(t) = N_0 e^{rt}$ où N_0 est la population initiale, à l'instant $t = 0$.
La croissance de la population est donc exponentielle pour ce modèle.
Dans la réalité, de telles conditions idéales sont rares et ne restent valables que sur de courtes durées. Notamment, dès que l'on s'approche de la surpopulation, le manque de nourriture, les interactions dues à la promiscuité etc., font baisser le taux de croissance si bien que la population ne dépasse pas une certaine limite. Le modèle de Verhulst (1838) a pour but de tenir compte de ces contraintes imposées par le milieu. Pour cela, Verhulst choisit de remplacer le taux de croissance constant r du modèle de Malthus par un taux de croissance variant avec la taille de la population. Plus précisément, Verhulst corrige le taux de croissance per capita r en le multipliant par le facteur correctif limitant $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ où K désigne l'effectif maximal de la population. Ainsi, lorsque la population est faible devant K, le facteur $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ est proche de 1 et le taux de croissance est proche de r. On retrouve alors le modèle malthusien et sa croissance exponentielle. A contrario, lorsque la population s'approche de sa limite K, le facteur $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ tend vers 0 et le taux de croissance devient très faible.
Verhulst aboutit ainsi à l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ N'(t) = r\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)N(t).$$

Une telle équation se rencontre pour d'autres modélisations, en économie et en chimie notamment. Elle porte le nom d'équation logistique. C'est une équation différentielle non linéaire.
Cependant, lorsque pour tout $t \in I$, $N(t) \neq 0$, si l'on pose $y = \frac{1}{N}$,
$(E) \iff -\dfrac{y'}{y^2} = r\Big(1 - \dfrac{1}{Ky}\Big)\dfrac{1}{y} \iff y' + ry = \dfrac{r}{K}$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, dont l'équation homogène $(H)\ :\ y' = -ry$ a pour solution générale $t \longmapsto \lambda e^{-rt}$.
On devine qu'une solution particulière de (E) est l'application constante $t \longmapsto \frac{1}{K}$, donc la solution générale de (E) est $t \longmapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$, ce qui donne $N(t) = \dfrac{K}{\lambda K e^{-rt} + 1}$, où λ est un réel qui dépend des conditions initiales.

Exemple. Un circuit électrique composé en série d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R alimentés par un générateur de force électromotrice V s'appelle un circuit RC. Si on note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t, la loi des mailles permet d'établir que q satisfait l'équation différentielle

$$(E)\ :\ q' + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R}.$$

Comme pour l'exemple précédent, on montre que
$(E) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + VC.$

Exemple. $(E)\ :\ y' + \dfrac{1}{1+t^2}y = 0 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-\arctan t}.$

Exemple. $y' - ty = 2t \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}} - 2.$

Résolution de (E) par la méthode de variation de la constante.
Soit y une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. On vient de voir que y est solution de (H) si et seulement si il existe une *constante* λ telle que $y(t) = \lambda e^{A(t)}$. Faire "varier la constante", c'est poser $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ où $\lambda(t)$ est une fonction quelconque de t.
Alors $\boxed{(E) \Longleftrightarrow \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)}$, puis si l'on fixe $t_0 \in I$,
$(E) \Longleftrightarrow \left[\exists C \in \mathbb{K},\ \ \forall t \in I,\ \ y(t) = e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}\ dx + Ce^{A(t)}\right].$

Démonstration.
$\diamond$ Pour tout $t \in I$, posons $\lambda(t) = y(t)e^{-A(t)}$. Alors λ est une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$ et, pour tout $t \in I$, $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. On en déduit que, pour tout $t \in I$,
$y'(t) = \lambda'(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)$, donc $(E) \Longleftrightarrow \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)$.
$\diamond$ Alors $(E) \Longleftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$. Fixons $t_0 \in I$.
Supposons que (E) est vérifiée. Alors λ' est continue, donc λ est de classe C^1 sur I. On en déduit que, pour tout $t \in I$, $\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} \lambda'(x)\ dx = C + \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}\ dx$, où $C \in \mathbb{K}$. La réciproque étant claire, car $x \longmapsto b(x)e^{-A(x)}$ est continue, on a montré que
$(E) \Longleftrightarrow \left[\exists C \in \mathbb{K},\ \ \lambda(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}\ dx + C\right]$, ce qui conclut. $\square$

Résolution du problème de Cauchy relatif à (E) et à $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Notons $(\mathcal{C})$ la condition de Cauchy suivante : $(\mathcal{C}) \Longleftrightarrow [(E)$ et $y(t_0) = y_0]$. Alors
$(\mathcal{C}) \Longleftrightarrow [\exists C \in \mathbb{K},\ \ y(t) = e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}\ dx + Ce^{A(t)}$ et $Ce^{A(t_0)} = y_0]$, donc
$(C) \Longleftrightarrow [\forall t \in I,\ \ y(t) = e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}\ dx + y_0e^{A(t)-A(t_0)}].$
On a donc prouvé, dans le cas particulier d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, qu'il y a existence et unicité d'une solution pour un problème de Cauchy donné. Ce résultat reste vrai pour des équations différentielles beaucoup plus générales, c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz, que nous énonçons plus loin.

Exemple. $(E)\ :\ y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = (\lambda + t^2)e^{\frac{t^2}{2}}.$

Principe de superposition des solutions : On suppose que $b = b_1 + b_2$, où b_1 et b_2 sont deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Notons (E_1) et (E_2) les équations différentielles suivantes : $(E_1) : y' = a(t)y + b_1(t)$ et $(E_2) : y' = a(t)y + b_2(t)$.
Supposons que z_1 est une solution de (E_1) et que z_2 est une solution de (E_2).
Alors $z_1 + z_2$ est une solution de (E).

Démonstration.
Notons à nouveau $f : \begin{array}{ccc} D^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & y' - a.y \end{array}$, de sorte que (E) correspond à l'équation linéaire $f(y) = b$, (E_1) à $f(y) = b_1$ et (E_2) à $f(y) = b_2$.
Ainsi, par hypothèse, $f(z_1) = b_1$ et $f(z_2) = b_2$, or f est linéaire,
donc $f(z) = f(z_1) + f(z_2) = b_1 + b_2 = b$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple. Considérons l'équation $(E)\ : y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}} + 2t$.
D'après le principe de superposition des solutions, et d'après les exemples précédents, la forme générale des solutions de (E) est $t \longmapsto (\lambda + t^2)e^{\frac{t^2}{2}} - 2$.

> **Exercice.** Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ ty' + y = 1$.
>
> **Solution :** Soit $I \in \{\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*\}$.
> ⋄ On commence par résoudre (E) sur I.
> On devine que l'application $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est une solution particulière de $(H)\ :\ ty' = -y$, or on a vu que S_H est une droite vectorielle,
> donc $(H) \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = \frac{\lambda}{t}$.
> De plus, $t \longmapsto 1$ est une solution particulière de (E), donc sur I,
> $(E) \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = 1 + \frac{\lambda}{t}$.
> ⋄ On recherche maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}$ en entier.
> Supposons que y est une telle solution. Alors ses restrictions $y|_{\mathbb{R}_+^*}$ et $y|_{\mathbb{R}_-^*}$ sont des solutions, donc ce qui précède montre qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_-^*$, $y(t) = 1 + \dfrac{\lambda_1}{t}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = 1 + \dfrac{\lambda_2}{t}$.
> Si $\lambda_1 \neq 0$, $|y(t)| \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est faux car en tant que solution de (E) sur $\mathbb{R}$, y est dérivable donc continue en 0, donc bornée au voisinage de 0.
> Ainsi $\lambda_1 = 0$ et de même $\lambda_2 = 0$.
> La réciproque étant claire, on a montré que la fonction constante égale à 1 est l'unique solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ en entier.

La définition suivante généralise la situation de cet exemple.

Définition. On suppose que c est une troisième application continue de I dans $\mathbb{K}$. On note (F) l'équation différentielle $c(t)y' = a(t)y + b(t)$.
(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 **non résolue**, alors que (E) est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue.

Soit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que t_0 est l'unique "zéro" de c sur I.

Notons $I_g = I \cap]-\infty, t_0[$ et $I_d = I \cap]t_0, +\infty[$.

Sur I_g et sur I_d, $(F) \Longleftrightarrow y' = \dfrac{a(t)}{c(t)}y + \dfrac{b(t)}{c(t)}$, ce qui nous ramène à une équation résolue.

Supposons que y_g est une solution de (F) sur I_g et que y_d est une solution de (F) sur I_d. On dit que y_g et y_d *se raccordent* en t_0 en une solution y sur I si et seulement si y est une solution sur I dont les restrictions sur I_g et I_d sont y_g et y_d.

Propriété. Reprenons les notations de la définition précédente. Remarquons que, sur I_d, y_d vérifie l'équation $y_d' = \frac{a(t)}{c(t)}y_d + \frac{b(t)}{c(t)}$, donc y_d est de classe C^1 sur I_d. De même, y_g est de classe C^1 sur I_g.
y_g et y_d se raccordent en t_0 en une solution de (F) définie **et de classe** C^1 sur I en entier si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

— (1) : Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $y_g(t) \underset{t \to t_0^-}{\longrightarrow} \ell$ et $y_d(t) \underset{t \to t_0^+}{\longrightarrow} \ell$;
— (2) : Il existe $\ell' \in \mathbb{K}$ tel que $y_g'(t) \underset{t \to t_0^-}{\longrightarrow} \ell'$ et $y_d'(t) \underset{t \to t_0^+}{\longrightarrow} \ell'$;

Démonstration.
◇ Supposons que y_g et y_d se raccordent en t_0 en une solution y définie et de classe C^1 sur I. Alors, sur I_d, $y_d(t) = y(t)$, donc par continuité de y en t_0, $y_d(t) \underset{t \to t_0^+}{\longrightarrow} y(t_0)$.
De même, $y_g(t) \underset{t \to t_0^-}{\longrightarrow} y(t_0)$. Ceci établit la propriété (1) avec $\ell = y(t_0)$.
y' étant supposée continue en t_0, le même raisonnement s'adapte avec y', y_d' et y_g', ce qui permet d'établir la propriété (2) avec $\ell' = y'(t_0)$.
◇ Réciproquement, supposons que les conditions (1) et (2) sont vérifiées.
On définit y sur $I \setminus \{t_0\}$ en convenant que, pour tout $t \in I_g$, $y(t) = y_g(t)$ et que, pour tout $t \in I_d$, $y(t) = y_d(t)$. Alors, d'après la condition (1), $y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell$, donc si l'on pose $y(t_0) = \ell$, on prolonge y en une application définie et continue sur I.
Alors, avec la condition (2), et sachant que y_d et y_g sont C^1, on peut appliquer le TLD, ce qui prouve que y est une application de classe C^1 sur I en entier avec $y'(t_0) = \ell'$.
y_d est solution de (F) sur I_d, donc c'est aussi le cas pour la restriction de y sur I_d. Il en est de même sur I_g. Ainsi, pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$, $c(t)y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$.
Cette dernière égalité fait intervenir uniquement des applications continues en t_0, donc en faisant tendre t vers t_0, on obtient que $c(t_0)y'(t_0) = a(t_0)y(t_0) + b(t_0)$.
On a bien montré que y est solution de (F) sur I en entier. □

Remarque. Dans le contexte des équations différentielles non résolues, le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est plus valable. En effet, avec les notations précédentes, y_d et y_g sont définies à deux constantes λ_1, λ_2 près.
Le plus souvent, la condition (3) est vérifiée. Les conditions (1) et (2) imposent deux relations portant sur λ_1 etλ_2. Ainsi, le problème de Cauchy $[(F) \wedge y(t_0) = y_0]$ peut n'avoir aucune solution (non existence) ou bien une infinité de solutions (non unicité).
Dans le cas de l'exercice précédent, lorsque $y_0 \neq 1$, il n'y a aucune solution au problème de Cauchy.

Exercice. Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le problème de Cauchy

$$(E) \ : \ y' + 2y \tan t = 2 \text{ et } y(0) = 0.$$

Solution : Soit y une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

Notons (H) l'équation sans second membre associée à (E).
Ainsi, $(H) \iff y' = -2y\tan t$.
Or $\int \tan t\,dt = -\ln(\cos t) + k$, donc $(H) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \ y = \lambda e^{2\ln(\cos t)} = \lambda\cos^2(t)$.
Appliquons la méthode de variation de la constante, en posant $y(t) = \lambda(t)\cos^2(t)$.
Alors, d'après le cours, $(E) \iff \lambda'(t)\cos^2(t) = 2$, or $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2(t)}\,dt = 2\tan t + k$, donc $(E) \iff y(t) = (\lambda + 2\tan t)\cos^2(t)$. Ainsi, La solution générale de (E) est $t \longmapsto \lambda\cos^2 t + \sin(2t)$, donc l'unique solution du problème de Cauchy est $t \longmapsto \sin(2t)$.

Exemple. Résolution du système différentiel

$$(S)\ :\qquad \begin{cases} (1+t^2)x' &= tx + y + 2t^2 - 1 \\ (1+t^2)y' &= -x + ty + 3t \end{cases}$$

$\diamond$ Soit x et y deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. posons $z = x + iy$.
Alors $(S) \iff (1+t^2)z'(t) = x(t-i) + y(1+it) + 2t^2 - 1 + 3it$, donc
$(S) \iff (1+t^2)z' = (t-i)z + (t+i)(2t+i) \iff z' = \dfrac{z}{t+i} + \dfrac{2t+i}{t-i}$.
$\diamond$ L'équation homogène associée est
$(H) : z' = \dfrac{z}{t+i} \iff \exists\lambda \in \mathbb{C}\quad z = \lambda(t+i)$, car $t \longmapsto t+i$ est une solution évidente de (H) et car S_H est une droite vectorielle.
$\diamond$ On peut retrouver ce résultat par le calcul, mais c'est nettement plus compliqué :
$(H) \iff \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \ z(t) = \lambda e^{\int \frac{dt}{t+i}}$. Or
$\displaystyle\int \frac{dt}{t+i} = \int \frac{t-i}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - i\arctan(t) + C$, donc
$(H) \iff \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \ z(t) = \lambda\sqrt{1+t^2}e^{-i\arctan(t)} = \lambda\sqrt{1+t^2}(\cos\arctan(t) - i\sin\arctan(t))$.
Posons $\theta = \arctan(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors $\cos\theta > 0$, donc
$\cos\arctan(t) = \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1+\tan^2\theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
et $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, donc $(H) \iff \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \ z = \lambda(1-it) = -i\lambda(t+i)$.
$\diamond$ Appliquons la méthode de variation de la constante. Posons $z = \lambda(t)(t+i)$. Alors
$(S) \iff \lambda'(t)(t+i) = \dfrac{2t+i}{t-i} \iff \lambda' = \dfrac{2t+i}{t^2+1}$, donc
$(S) \iff \exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\quad \lambda(t) = \ln(1+t^2) + i\text{arctan}(t) + C_1 + iC_2$, donc

$$(S) \iff \exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\quad \forall t \in \mathbb{R}\quad \begin{cases} x(t) &= C_1 t - C_2 - \arctan(t) + t\ln(1+t^2) \\ y(t) &= C_1 + tC_2 + t.\text{arctan}(t) + \ln(1+t^2) \end{cases}$$

2 Equation différentielle linéaire du second ordre

2.1 Équations à coefficients quelconques

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. On fixe trois applications a, b et c continues de I dans $\mathbb{K}$.
On considère l'équation suivante en l'inconnue y :

$$(E) \qquad y" = a(x)y' + b(x)y + c(x).$$

C'est la forme générale d'une équation différentielle linéaire résolue du second ordre.
On notera (H) l'équation homogène associèe : $y" = a(x)y' + b(x)y$.

Définition. On appelle solution de (E) toute application $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in I \;\; y"(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x).$$

Dans ce cas, le graphe de y est appelé une courbe intégrale de (E).

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E = \{y_0 + y / y \in S_H\} \stackrel{\Delta}{=} y_0 + S_H$. On dit que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

Démonstration.
(E) est encore une équation linéaire. Cette propriété est encore un cas particulier de la propriété vue en page 12 du chapitre sur la structure d'espace vectoriel. □

Définition. Soit $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
On appelle problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y'_0) le problème de la recherche des solutions de (E) telles que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz.
Pour tout $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y'_0).

Démonstration.
Admis □

Propriété. S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{K}^I$.

Démonstration.
Fixons $x_0 \in I$ et notons $\begin{array}{rccc} \varphi : & S_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(x_0), y'(x_0)) \end{array}$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, φ est bijective. De plus elle est linéaire, donc elle réalise un isomorphisme entre S_H et $\mathbb{K}^2$. Or $\mathbb{K}^2$ est de dimension finie, donc c'est aussi le cas de S_H et $\dim(S_H) = \dim(\mathbb{K}^2) = 2$. □

Cas particulier où on connaît une solution φ_1 de (H) ne s'annulant pas sur I. On considère l'application $\lambda = \dfrac{y}{\varphi_1}$. On dit que l'on pose $y = \lambda\varphi_1$), c'est une pseudo-méthode de variation de la constante.
Alors (E) est équivalente à une équation linéaire d'ordre 1 en λ'.

Démonstration.
$(E) \iff c(x) + b(x)\lambda\varphi_1 + a(x)(\lambda'\varphi_1 + \lambda\varphi_1') = \lambda"\varphi_1 + \lambda\varphi"_1 + 2\lambda'\varphi_1'$,
or $b(x)\varphi_1 + a(x)\varphi_1' = \varphi"_1$, donc
$(E) \iff c(x) + a(x)\lambda'\varphi_1 = \lambda"\varphi_1 + 2\lambda'\varphi_1' \iff \lambda" = \dfrac{a(x)\varphi_1 - 2\varphi_1'}{\varphi_1}\lambda' + \dfrac{c(x)}{\varphi_1}$. □

Exemple. On pose $I =]-1, +\infty[$.
Résoudre sur I l'équation (E) : $(t+1)y" - 2y' - (t-1)y = te^{-t}$.
◇ On remarque que $(1+t) - 2 + (1-t) = 0$, donc $t \longrightarrow e^t$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène et cette solution ne s'annule jamais. On peut donc appliquer la méthode de pseudo-variation de la constante.
Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. On pose $\forall t \in I \quad y(t) = \lambda(t)e^t$.
Alors $(E) \iff te^{-t} = e^t((1-t)\lambda - 2(\lambda + \lambda') + (1+t)(\lambda + 2\lambda' + \lambda"))$, puis
$(E) \iff te^{-2t} = (1+t)\lambda" + 2t\lambda' \iff \lambda" = -\dfrac{2t}{1+t}\lambda' + \dfrac{te^{-2t}}{1+t}$.
◇ Notons (H) l'équation $z' = -\dfrac{2t}{1+t}z$.
$\displaystyle\int \frac{-2t}{1+t}dt = \int \frac{-2(1+t)+2}{1+t}dt = -2t + 2\ln|1+t| + k$, donc
$(H) \iff [\exists D \in \mathbb{R} \ \forall t \in I \ \ z = D(1+t)^2e^{-2t}]$.
◇ Appliquons la méthode de variation de la constante :
on pose $\lambda' = D(t)(1+t)^2e^{-2t}$. D'après le cours,
$(E) \iff D'(t)(1+t)^2e^{-2t} = \dfrac{te^{-2t}}{1+t} \iff D'(t) = \dfrac{t}{(1+t)^3} = \dfrac{(1+t)-1}{(1+t)^3}$, donc
$(E) \iff \exists C \in \mathbb{R} \ \ D(t) = \dfrac{-1}{1+t} + \dfrac{1}{2(1+t)^2} + C$, puis
$(E) \iff \exists C \in \mathbb{R} \ \ \lambda' = e^{-2t}(-(1+t) + \frac{1}{2} + C(1+t^2+2t))$.
Ainsi $(E) \iff \exists C \in \mathbb{R} \ \forall t \in I \ \ \lambda'(t) = (Ct^2 + (2C-1)t + C - \frac{1}{2})e^{-2t}$.
◇ Cette dernière application admet une primitive de la forme $(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^{-2t}$, avec $Ct^2 + (2C-1)t + C - \frac{1}{2} = -2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + 2t\alpha + \beta$, donc
$-2\alpha = C$, $-2\beta + 2\alpha = 2C - 1$ et $-2\gamma + \beta = C - \frac{1}{2}$. Ainsi $\alpha = -\dfrac{C}{2}$,
$\beta = \frac{1}{2}(-C - 2C + 1) = -\dfrac{3C-1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}(\dfrac{1-3C}{2} - C + \dfrac{1}{2}) = \dfrac{-5C+2}{4}$. Donc
$(E) \iff \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2 \quad y(t) = e^{-t}(C(-\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3}{2}t - \dfrac{5}{4}) + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}) + De^t$.
Ainsi $(E) \iff \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2 \quad y(t) = De^t + e^{-t}(C(2t^2 + 6t + 5) + \dfrac{t+1}{2})$.

Nous allons maintenant étudier les équations différentielles linéaires du second ordre non résolue, en adaptant le chapitre précédent.

Définition. On suppose que d est une quatrième application continue de I dans $\mathbb{K}$. On note (F) l'équation différentielle $d(x)y" = a(x)y' + b(x)y + c(x)$.

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que x_0 est l'unique "zéro" de d sur I.

Notons $I_g = I \cap]-\infty, x_0[$ et $I_d = I \cap]x_0, +\infty[$.

Sur I_g et sur I_d, $(F) \iff y'' = \dfrac{a(x)}{d(x)}y'(x) + \dfrac{b(x)}{d(x)}y(x) + \dfrac{c(x)}{d(x)}$, ce qui nous ramène à une équation différentielle résolue linéaire d'ordre 2.

Supposons que y_g est une solution de (F) sur I_g et que y_d est une solution de (F) sur I_d. On dit que y_g et y_d *se raccordent* en x_0 en une solution y sur I si et seulement si y est une solution de (F) sur I dont les restrictions sur I_g et I_d sont y_g et y_d.

Propriété. Reprenons les notations de la définition précédente.
Remarquons que, sur I_d, y_d vérifie l'équation $y_d'' = \frac{a(x)}{d(x)}y_d'(x) + \frac{b(x)}{d(x)}y_d(x) + \frac{c(x)}{d(x)}$, donc y_d est de classe C^2 sur I_d. De même, y_g est de classe C^2 sur I_g.
y_g et y_d se raccordent en x_0 en une solution définie **et de classe** C^2 sur I en entier si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

— (1) : Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $y_g(t) \underset{t\to t_0^-}{\longrightarrow} \ell$ et $y_d(t) \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} \ell$;

— (2) : Il existe $\ell' \in \mathbb{K}$ tel que $y_g'(t) \underset{t\to t_0^-}{\longrightarrow} \ell'$ et $y_d'(t) \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} \ell'$;

— (3) : Il existe $\ell'' \in \mathbb{K}$ tel que $y_g''(t) \underset{t\to t_0^-}{\longrightarrow} \ell''$ et $y_d''(t) \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} \ell''$;

Démonstration.
La démonstration du chapitre précédent s'adapte facilement, grâce à la généralisation du TLD aux dérivées d'ordres supérieurs. □

Remarque. Dans le contexte des équations différentielles non résolues, le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est plus valable.

Exemple. On reprend l'équation $(E) : (t+1)y" - 2y' - (t-1)y = te^{-t}$, mais on cherche maintenant les solutions de classe C^2 définies sur $\mathbb{R}$ en entier.
⋄ D'après la propriété précédente, on peut partir d'une solution y_d de (E) sur $]-1, +\infty[$ et d'une solution y_g de (E) sur $]-\infty, -1[$ et de regarder quand les conditions de raccordement sont satisfaites.
L'étude de (E) sur $]-\infty, -1[$ est en tout point similaire à l'étude sur $]-1, +\infty[$ que l'on a réalisée précédemment. Ainsi, il existe des constantes réelles C_d, D_d, C_g et D_g telles que, pour tout $t \in]-\infty, -1[$, $y_g(t) = D_g e^t + e^{-t}(C_g(2t^2 + 6t + 5) + \dfrac{t+1}{2})$ et pour tout $t \in]-1, +\infty[$, $y_d(t) = D_d e^t + e^{-t}(C_d(2t^2 + 6t + 5) + \dfrac{t+1}{2})$.
⋄ Ici, on peut remplacer le laborieux calcul direct des dérivées successives en -1 de y_g et de y_d par un calcul de développement limité de y_g et de y_d au voisinage de -1. En effet, les formules précédentes montrent que y_g se prolonge sur $]-\infty, -1]$ en une application de classe C^2 et que y_d se prolonge sur $[-1, +\infty[$ en une application de classe C^2, donc en utilisant ces prolongements, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$,

$y_d^{(i)}(t) \underset{t\to -1^+}{\longrightarrow} y_d^{(i)}(-1)$ et $y_g^{(i)}(t) \underset{t\to -1^-}{\longrightarrow} y_g^{(i)}(-1)$. Ainsi, la CNS de raccordement est équivalente à $[\forall i \in \{0,1,2\},\ y_d^{(i)}(-1) = y_g^{(i)}(-1)]$, c'est-à-dire, d'après la formule de Taylor-Young et le principe d'unicité du développement limité, au fait que y_d et y_g admettent au voisinage de -1 le même développement limité à l'ordre 2.

$\diamond$ Posons $h = t+1$.

$y_g(t) = D_g e^{h-1} + e^{1-h}(C_g(2h^2+2-4h+6h-6+5) + \frac{h}{2})$, donc

$y_g(t) = D_g \dfrac{1}{e}(1+h+\dfrac{h^2}{2} + \circ(h^2)) + e(1-h+\dfrac{h^2}{2}+\circ(h^2))(C_g + (2C_g+\dfrac{1}{2})h + 2C_g h^2)$,

puis

$$\begin{aligned} y_g(t) = \quad & D_g\frac{1}{e}(1+h+\frac{h^2}{2}+\circ(h^2)) \\ & + e\Big[C_g + h\Big(-C_g + 2C_g + \frac{1}{2}\Big) + h^2\Big(\frac{C_g}{2} + 2C_g - (2C_g+\frac{1}{2})\Big) + \circ(h^2)\Big]. \end{aligned}$$

Finalement, $y_g(t) = \dfrac{D_g}{e} + C_g e + h(\dfrac{D_g}{e} + C_g e + \dfrac{e}{2}) + \dfrac{h^2}{2}(\dfrac{D_g}{e} + C_g e - e) + o(h^2)$.

Le calcul étant identique pour y_d, y_g et y_d se raccordent si et seulement si

$$\frac{D_g}{e} + C_g e = \frac{D_d}{e} + C_d e.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ en entier est

$$z_0 + \Big\{D_d z_{1,d} + C_d z_{2,d} + D_g z_{1,g} + C_g z_{2,g} \ / \ \frac{D_g}{e} + C_g e = \frac{D_d}{e} + C_d e\Big\},$$

où $\begin{array}{rccl} z_{1,g}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} e^t & \text{si } t < -1 \\ 0 & \text{si } t \geq -1 \end{cases} \end{array}$, $\begin{array}{rccl} z_{2,g}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} (2t^2+6t+5)e^{-t} & \text{si } t < -1 \\ 0 & \text{si } t \geq -1 \end{cases} \end{array}$,

$\begin{array}{rccl} z_{1,d}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} e^t & \text{si } t \geq -1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} \end{array}$, $\begin{array}{rccl} z_{2,d}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} (2t^2+6t+5)e^{-t} & \text{si } t \geq -1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} \end{array}$

et $\begin{array}{rccl} z_0: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{t+1}{2}e^{-t} \end{array}$.

2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et f une application continue de I dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation suivante en l'inconnue y :

$$(E) \qquad y" + ay' + by = f(x).$$

On notera (H) l'équation homogène associée : $y" + ay' + by = 0$.

Exemples :

— L'équation différentielle décrivant l'élongation d'un ressort de raideur k portant une masse m (sans force de frottement) est $my'' + ky = 0$. On parle de régime libre car le système ne subit pas de force extérieure.
— Avec une force de frottement proportionnelle à la vitesse, l'équation différentielle précédente devient $my'' + cy' + ky = 0$. C'est toujours un régime libre (les forces de frottements ne sont pas considérées comme des forces extérieures).
— Lorsqu'enfin, le ressort subit une force extérieure dépendant du temps, on obtient l'équation différentielle $my'' + cy' + ky = f(t)$. On parle alors de régime forcé.
— L'équation différentielle régissant la position du centre de gravité d'un pendule oscillant est du type $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$ où ω est une grandeur physique. Cette équation n'est pas linéaire. En physique, on considère parfois que les oscillations sont de faibles amplitudes, ce qui permet de linéariser l'équation sous la forme $\theta'' + \omega^2\theta = 0$.

2.2.1 Résolution de (H)

Le polynôme $\chi = X^2 + aX + b$ est appelé le polynôme caractéristique de (H) ou de (E). On note $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Lorsque $\lambda \in \mathbb{K}$, notons $\begin{array}{rccc} e_\lambda : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$.

e_λ est solution de (H) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda x}(b + a\lambda + \lambda^2) = 0$, donc si et seulement si λ est une racine du polynôme χ.

◇ *Premier cas :*

$\boxed{\text{On suppose que } \chi \text{ possède deux racines distinctes dans } \mathbb{K}, \text{ notées } \lambda \text{ et } \mu.}$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela revient à supposer que $\Delta \neq 0$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela revient à supposer que $\Delta > 0$.

Alors $\boxed{y \text{ est solution de } (H) \text{ si et seulement si } \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ y(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}.}$

Démonstration.

On sait déjà que $e_\lambda, e_\mu \in S_H$. Montrons (e_λ, e_μ) est une famille libre de S_H.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha e_\lambda + \beta e_\mu = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x} = 0$ et, en dérivant, $\alpha\lambda e^{\lambda x} + \beta\mu e^{\mu x} = 0$, donc en prenant $x = 0$, on obtient que $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$. Ainsi, $\beta = -\alpha$ et $0 = \alpha(\lambda - \mu)$, or $\lambda \neq \mu$, donc $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$.

Or on a vu que $\dim(S_H) = 2$, donc (e_λ, e_μ) est une base de S_H, ce qu'il fallait démontrer.

□

◇ *Deuxième cas :* $\boxed{\text{On suppose que } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et que } \Delta < 0}$.

$\boxed{\text{Notons } \lambda = r + is \text{ (avec } r, s \in \mathbb{R}) \text{ l'une des racines complexes de } \chi}$.

Alors $\boxed{y \text{ est solution de } (H) \text{ si et seulement si}}$ il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = e^{rx}(\alpha\cos(sx) + \beta\sin(sx))}$.

Démonstration.
$\Delta < 0$, donc il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = (i\delta)^2$. Ainsi $\lambda = \dfrac{-a + i\delta}{2}$ et $\mu = \dfrac{-a - i\delta}{2}$ (quitte à échanger les rôles joués par λ et μ). Ceci prouve que $\mu = \overline{\lambda}$.
Posons $\lambda = r + is$ avec $r, s \in \mathbb{R}$. Alors d'après le premier cas, $c = \frac{1}{2}(e_\lambda + e_\mu)$ est une solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$c(x) = \frac{1}{2}(e^{isx} + e^{-isx})e^{rx} = e^{rx}\cos(sx)$, donc c est une solution de (H) à valeurs réelles.
De même, si l'on pose $s = \frac{1}{2i}(e_\lambda - e_\mu)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = e^{rx}\sin(x)$ et s est une solution de (H) à valeurs réelles.
On montre facilement que (c, s) est une famille libre de S_H, donc c'est une base de S_H, ce qu'il fallait démontrer. □

◇ *Troisième cas :* $\boxed{\text{on suppose que } \Delta = 0. \text{ Notons } \lambda \text{ la racine double de } \chi}$.
Alors $\boxed{y \text{ est solution de } (H) \text{ si et seulement si }}$ il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = e^{\lambda x}(\alpha + \beta x)}$.

Démonstration.
$\Delta = 0$, donc $a^2 - 4b = 0$. Alors $\chi(x) = x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2$. Ainsi, $\lambda = -\frac{a}{2}$ est la racine double de χ. En particulier, λ vérifie les relations suivantes : $2\lambda + a = 0$ et $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.
On a vu que $x \longmapsto e^{\lambda x}$ est une solution de (H) et elle ne s'annule jamais. On peut donc appliquer la pseudo-méthode de variation de la constante en posant $y(x) = u(x)e^{\lambda x}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
(H) &\iff 0 = e^{\lambda x}(bu(x) + a(u'(x) + \lambda u(x)) + (u''(x) + 2\lambda u'(x) + \lambda^2 u(x)))\\
&\iff 0 = u(x)(b + \lambda a + \lambda^2) + u'(x)(a + 2\lambda) + u''(x)\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \ u''(x) = 0\\
&\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ u(x) = \alpha + \beta x\\
&\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ y(x) = e^{\lambda x}(\alpha + \beta x).
\end{aligned}$$

□

Exemple. Un oscillateur harmonique soumis au champ de pesanteur terrestre satisfait l'équation

$$(E)\ :\ y'' + \omega^2 y = g,\ \text{ où } \omega > 0.$$

La solution générale de l'ESSM est $y(t) = \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
Une solution particulière de (E) est la fonction constante $t \longmapsto \dfrac{g}{\omega^2}$,
donc $(E)\ :\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega^2}$.

2.2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Comme on sait résoudre (H), quitte à restreindre l'intervalle I à un sous-intervalle, on peut se placer dans le cas où on connaît une solution de (H) qui ne s'annule jamais. On a déjà vu comment résoudre (E) dans cette situation.

Cependant, lorsque f est le produit d'une application polynomiale et d'une application exponentielle, il est plus simple de rechercher une solution particulière à l'aide du théorème ci-dessous.

Propriété. Soit P une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: il existe une famille presque nulle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Alors cette famille est unique et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$.
On dit que a_n est le coefficient de P de degré n.
En particulier, $P = 0 \iff [\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = 0]$.

Formule de Taylor pour les polynômes : Soit P une application polynomiale et $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Démonstration.
Lorsque $x \in \mathbb{R}$, il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à P entre a et x, à un ordre supérieur au degré de P, de sorte que le reste intégral est nul. Ainsi, en tant que polynôme de $\mathbb{C}[X]$, $P - \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$ possède une infinité de racines, donc il est identiquement nul. $\square$

Définition. Soit $P\ :\ x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Lorsque P n'est pas identiquement nulle, on appelle degré de P le maximum de $\{n \in \mathbb{N}/a_n \neq 0\}$. Le degré de P est noté $\deg(P)$.
Lorsque P est identiquement nulle, on convient que $deg(P) = -\infty$.

Théorème. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall x \in I \quad f(x) = e^{\lambda x} P(x).$$

Alors (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque λ n'est pas racine de χ, avec $m = 1$ lorsque λ est une racine simple de χ et avec $m = 2$ lorsque λ est une racine double de χ.

Démonstration.
Admis. $\square$

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour les équations différentielles de la forme $(E)\ :\ y' + by = e^{\lambda x} P(x)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$:
(E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.

Plus précisément, (E) admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque $\lambda \neq -b$ et $m = 1$ lorsque $\lambda = -b$ (dans ce cas, $\chi = X + b$).

Exemple. Résolution de $(E) : y" - 2y' + y = \text{ch}t$.
Le polynôme caractéristique de l'équation homogène (H) associée à (E) est
$\chi = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, donc 1 est une valeur propre double. Ainsi

$$(H) \Longleftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ y(t) = e^t(u + tv).$$

Notons $(E_1) : y" - 2y' + y = \dfrac{e^t}{2}$ et $(E_2) : y" - 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{2}$.
1 étant une racine double de χ, on cherche une solution particulière y_1 de (E_1) sous la forme $\alpha t^2 e^t$. y_1 convient si et seulement si
$\dfrac{e^t}{2} = e^t(\alpha t^2) - 2e^t(2\alpha t + \alpha t^2) + e^t(2\alpha + 2\alpha t + (2\alpha t + \alpha t^2)) = 2\alpha e^t$, donc si et seulement si $\alpha = \frac{1}{4}$.
-1 n'étant pas racine de χ, on cherche une solution particulière y_2 de (E_2) sous la forme βe^{-t}. y_2 convient si et seulement si
$\dfrac{e^{-t}}{2} = e^{-t}\beta(1 + 2 + 1)$, donc si et seulement si $\beta = \frac{1}{8}$.
D'après le principe de superposition des solutions, on en déduit que

$$(E) \Longleftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ y(t) = e^t(u + tv + \frac{t^2}{4}) + \frac{e^{-t}}{8}.$$

Remarque. Supposons que $a, b \in \mathbb{R}$ et que $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x)\cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et où P est un polynôme à coefficients réels. Alors on peut utiliser le théorème précédent en écrivant que $f(x) = \text{Re}(P(x)e^{i\omega x})$ et en remarquant que si z est solution de $z" + az' + bz = P(x)e^{i\omega x}$, alors $y = \text{Re}(z)$ est solution de $y" + ay' + by = \text{Re}(P(x)e^{i\omega x})$. De même, lorsque $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x)\sin(\omega x)$, on peut utiliser le théorème précédent en écrivant que $f(x) = \text{Im}(P(x)e^{i\omega x})$

Remarque. Plus généralement, lorsque $f(x)$ est de la forme $P(x)e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, on peut chercher une solution particulière de la forme $H(x)e^{Q(x)}$, où H est aussi un polynôme.

Exercice. Résoudre $(E) \ : \ y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\cos t$.

Solution : Le polynôme caractéristique est $\chi = X^2 + 2X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = (2i)^2$, donc les racines de χ sont $-1 \pm i$.
Ainsi, $(H) \Longleftrightarrow y = e^{-t}(\alpha \cos t + \beta \sin t)$.
On note $(E') \ : \ y'' + 2y' + 2y = 2e^{(-1+i)t}$. On en cherche une solution particulière de la forme $t \longmapsto ate^{(-1+i)t}$. On obtient $a = -i$, donc une solution particulière de (E) est $t \longmapsto \text{Re}(-ite^{(-1+i)t}) = te^{-t}\sin t$. En conclusion,

$$(E) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ y(t) = e^{-t}(\alpha \cos t + (\beta + t)\sin t).$$

3 Compléments hors programme

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Notation. On suppose que f est une application à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$. On note (E) l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.
(E) est la forme générale d'une équation différentielle résolue d'ordre 1.
y est une solution de (E) si et seulement si y est une application à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur un intervalle I de cardinal infini inclus dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.
À noter que l'intervalle I est lui-même une inconnue de (E).

Définition. Avec ces notations, considérons une solution y de (E) définie sur un intervalle I. On dit que y est une solution maximale de (E) si et seulement si pour intervalle J contenant I, s'il existe un prolongement de y sur J en une solution de (E), alors $I = J$.
Autrement dit, y est une solution maximale de (E) si et seulement si il n'existe pas de prolongement strict de y en une solution de (E).

Définition. Soit $(t_0, y_0) \in U$. On appelle "problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0, y_0)" la recherche des solutions y de (E) telles que $y(t_0) = y_0$.

Théorème. On suppose que f est continue.
On suppose également que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie et continue sur U.
Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy relatif à (E) et à (t_0, y_0). Cette solution est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
De plus, toute autre solution du même problème de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

3.2 Equations à variables séparées

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis et soient $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : K \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Longleftrightarrow \boxed{a(t) - b(y)y' = 0}.$$

On dit qu'une telle équation est à variables séparées.
Si A et B sont des primitives de a et de b respectivement,
$(E) \Longleftrightarrow \frac{d(A(t) - B(y(t)))}{dt} = 0$, donc les courbes intégrales de (E) ont pour équations cartésiennes $A(x) = B(y) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
En pratique, on écrira $(E) \Longleftrightarrow a(t)dt = b(y)dy \Longleftrightarrow A(t) = B(y) + C$.

Exemple. On peut résoudre directement l'équation de Verhulst :

$$(E) \ : \ N'(t) = r\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)N(t), \text{ où } K \text{ est un paramètre strictement positif.}$$

En effet, en divisant par $\left(1-\dfrac{N(t)}{K}\right)N(t)$, on se ramène à une équation à variables séparées, mais il va falloir éviter les divisions par zéro.

L'équation (E) s'écrit $N' = f(t,N)$, où $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,y) & \longmapsto & r(1-\frac{y}{K})y \end{array}$.

f est clairement continue. De plus, pour tout $(t,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = r(1-\dfrac{y}{K}) - ry\dfrac{1}{K}$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. On pourra donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. Soit N une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

$\diamond$ *Premier cas :* Supposons qu'il existe $t_0\in I$ tel que $N(t_0)=0$.

Supposons que N est solution de (E). Alors c'est une solution du problème de Cauchy relatif à (E) et à la condition initiale $(t_0,0)$. Mais l'application identiquement nulle, définie sur $\mathbb{R}$ en entier, est clairement aussi une solution de ce problème de Cauchy, et elle est clairement maximale. Alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, N est la restriction à I de l'application identiquement nulle. La réciproque étant évidente, dans ce premier cas, on a montré que $(E) \Longleftrightarrow \forall t\in I,\ \ N(t)=0$.

$\diamond$ *Second cas :* Supposons qu'il existe $t_0\in I$ tel que $N(t_0)=K$.

En adaptant le raisonnement précédent, on montre que $(E) \Longleftrightarrow \forall t\in I,\ \ N(t)=K$.

$\diamond$ *Cas général :* On suppose que pour tout $t\in I$, $N(t)\notin\{0,K\}$.

Alors, pour tout $t\in I$, $\left(1-\dfrac{N(t)}{K}\right)N(t)\neq 0$, donc $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{dN}{(1-\frac{N}{K})N} = rdt$.

Lorsque $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,K\}$, $\dfrac{1}{(1-\frac{x}{K})x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{K}}{1-\frac{x}{K}}$,

donc $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\frac{x}{K})x} = \ln|x| - \ln\left|1-\frac{x}{K}\right| + \lambda$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \ \forall t\in I,\ \ \ln\left|\frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}\right| + \lambda = rt \\ &\Longleftrightarrow \left|\frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}\right| = e^{rt}e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de ce cas, $t\longmapsto \dfrac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}$ ne s'annule jamais, or elle est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle conserve un signe constant. Il existe donc $\varepsilon\in\{1,-1\}$ tel que, pour tout $t\in I$, $\left|\dfrac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}\right| = \varepsilon\dfrac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(E) &\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists\varepsilon\in\{-1,1\},\ \forall t\in I,\ \frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}=e^{rt}\varepsilon e^{-\lambda}\\ &\iff \exists C\in\mathbb{R}^*,\ \forall t\in I,\ \frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}=Ce^{rt}\\ &\iff \exists C\in\mathbb{R}^*,\ N(t)\Big(1+\frac{C}{K}e^{rt}\Big)=Ce^{rt}\\ &\iff \exists C\in\mathbb{R}^*,\ \forall t\in I,\ N(t)=\frac{Ce^{rt}}{1+\frac{C}{K}e^{rt}}=\frac{K}{\frac{K}{C}e^{-rt}+1}.\end{aligned}$$

3.3 Équations à variables séparables

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis. Soient a et d deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et b et c deux applications continues de K dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E)\iff \boxed{a(t)c(y)-b(y)d(t)y'=0}.$$

• On dit qu'une telle équation est à variables séparables. On peut en effet, en divisant par $c(y)$ et $d(t)$ se ramener à une équation à variables séparées.
• Plus précisément, soit $y : I\longrightarrow\mathbb{K}$ une application dérivable. Quitte à restreindre l'intervalle I, on supposera que d ne s'annule pas sur I.
Ainsi $(E)\iff \dfrac{a(t)}{d(t)}c(y)-y'b(y)=0.$
Il faudra ensuite étudier les possibles raccordements des solutions en chaque zéro de d.
• Si $y_0\in K$ est un zéro de c, l'application constante $y=y_0$ est une solution de (E). Ainsi chaque zéro de c fournit une solution particulière.
On suppose ensuite que $\forall t\in I\ \ c(y(t))\neq 0$. Alors
$(E)\iff \dfrac{a(t)}{d(t)}-y'\dfrac{b(y)}{c(y)}=0.$
Il s'agit d'une équation à variables séparées et on est donc ramené au a). Il reste ensuite à étudier les possibles recollements de ces dernières solutions avec les solutions particulières $y=y_0$ où y_0 est un zéro de c.

Exercice. Résolution de (E) : $(x^2-x)y'=1-y^2$.

Résolution. (E) est bien une équation à variables séparables.
Soient I un intervalle de cardinal infini et $y : I\longrightarrow\mathbb{R}$ une application dérivable.
• On recherche d'abord les solutions de (E) lorsque $I\cap\{0,1\}=\emptyset$.
Dans ce cas, pour tout $x\in I$, $x^2-x\neq 0$.
Posons $U=(\mathbb{R}\setminus\{0,1\})\times\mathbb{R}$. U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Notons $\begin{array}{rccl} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1-y^2}{x^2-x}\end{array}$. Ainsi, $(E)\iff y'=f(x,y)$.
De plus f est continue et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie et continue sur U, donc on pourra utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.

$\diamond$ *Premier cas :* On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = 1$.
Alors y est une solution au problème de Cauchy relatif à (E) et au couple $(x_0, 1)$, or la fonction constante égale à 1 est également une solution de ce problème de Cauchy, et elle est clairement maximale, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x \in I$, $y(x) = 1$. La réciproque étant évidente, on a montré que dans ce cas, $(E) \iff \forall x \in I,\ y(x) = 1$. On obtient ainsi une première solution particulière que l'on notera y_1, définie sur $\mathbb{R}$ en entier.
$\diamond$ *Second cas :* On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = -1$.
Alors en adaptant le cas précédent, on montre que $(E) \iff \forall x \in I,\ \ y(x) = -1$. On obtient ainsi une seconde solution particulière que l'on notera y_{-1}, définie sur $\mathbb{R}$ en entier.
$\diamond$ *Cas général :* On suppose que, pour tout $x \in I$, $y(x) \notin \{1, -1\}$.
Ainsi $(E) \iff \dfrac{y'}{1-y^2} = \dfrac{1}{x^2-x}$. On a donc séparé les variables.

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \int (-\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x})dx \\
&\iff \exists C \in \mathbb{R}\ \ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = -\ln|x| + \ln|1-x| + C \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ \ \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^2 + \ln\lambda \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ \ \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \lambda\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^2.
\end{aligned}$$

$\diamond$ Supposons que y est solution de (E). Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right| = \lambda\Big(\dfrac{1-x}{x}\Big)^2$. Comme $\dfrac{1+y}{1-y}$ est une application continue ne s'annulant pas sur I, elle conserve un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi $\dfrac{1+y}{1-y} = \mu\Big(\dfrac{1-x}{x}\Big)^2$ où $\mu = \pm\lambda$. Réciproquement, il est clair que si cette propriété est vérifiée, y est une solution de (E). Ainsi
$(E) \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*\ \ \dfrac{1+y}{1-y} = \mu\Big(\dfrac{1-x}{x}\Big)^2$.
Donc $(E) \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*\ \ y\left(1 + \mu\Big(\dfrac{1-x}{x}\Big)^2\right) = \mu\Big(\dfrac{1-x}{x}\Big)^2 - 1$. Finalement,
$(E) \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*\ \ \forall x \in I\ \ y(x) = \dfrac{\mu(\frac{1-x}{x})^2 - 1}{\mu(\frac{1-x}{x})^2 + 1}$.

- Etudions les raccordements des solutions en 0.

Supposons que $I \subseteq\ ]-\infty, 0[$ ou que $I \subseteq\ ]0, 1[$ et que 0 est l'une des bornes de I. Soit y une solution de (E) sur I, différente de y_1 et de y_{-1}.

Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $y(x) = \dfrac{\mu\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^2 - 1}{\mu\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^2 + 1}$. Au voisinage de 0,

$y(x) = \dfrac{\mu(x^2 - 2x + 1) - x^2}{\mu(x^2 - 2x + 1) + x^2} = \dfrac{\mu(1 - 2x) + \circ(x)}{\mu(1 - 2x) + \circ(x)}$,
donc $y(x) = (1 - 2x + \circ(x))(1 - 2x + \circ(x))^{-1}$.
Or $\dfrac{1}{1 + u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + o(u)$, donc par changement de variable,
$(1 - 2x + \circ(x))^{-1} \underset{x \to 0}{=} 1 - (-2x + o(x)) + o(-2x + o(x)) = 1 + 2x + o(x)$.
Ainsi, $y(x) = (1 - 2x + \circ(x))(1 + 2x + \circ(x)) = 1 + \circ(x)$.
Ainsi toute solution (différente de y_{-1}) de (E) définie à droite de 0 se raccorde avec toute solution (différente de y_{-1}) définie à gauche de 0.

• Etudions maintenant les raccordements des solutions en 1.
Supposons que $I \subseteq]1, +\infty[$ avec $1 = \inf I$ ou que $I \subseteq]0, 1[$ avec $1 = \sup I$.
Soit y une solution de (E) sur I. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que
$y(x) = \dfrac{\mu\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 - 1}{\mu\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + 1}$. Au voisinage de 1, en posant $u = x - 1$,
$y(x) = \dfrac{\mu\left(\frac{u}{u+1}\right)^2 - 1}{\mu\left(\frac{u}{1+u}\right)^2 + 1} = \dfrac{\mu u^2 - u^2 - 2u - 1}{\mu u^2 + u^2 + 2u + 1}$, donc
$y(x) = \dfrac{-1 - 2u + \circ(u)}{1 + 2u + \circ(u)} = -(1 + 2u + \circ(u))(1 - 2u + \circ(u)) = -1 + \circ(u)$.
Ainsi toute solution (différente de y_1) de (E) définie à droite de 1 se raccorde avec toute solution (différente de y_1) définie à gauche de 1.