DM 41

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le jeudi 13 mars 2025.

On note S l'ensemble des séries de complexes. On rappelle que c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que lorsque $u = \sum u_n$ et $v = \sum v_n$ sont deux séries de complexes, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\alpha u + v = \sum(\alpha u_n + v_n)$. On note :

— S_0 l'ensemble des séries de complexes dont le terme général tend vers 0 en $+\infty$;
— S_C l'ensemble des séries convergentes de complexes et
— S_{AC} l'ensemble des séries absolument convergentes de complexes.

Partie I : à la frontière des séries convergentes

1°) Montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel strictement inclus dans S.
Montrer que S_C est un sous-espace vectoriel strictement inclus dans S_0.
Montrer que S_{AC} est un sous-espace vectoriel strictement inclus dans S_C.

Pour toute série $u = \sum u_n$ de S et pour tout entier naturel n, on note U_n la somme partielle d'ordre n et, lorsque $u \in S_C$, on note R_n le reste de Cauchy d'ordre n :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

en convenant que $U_{-1} = 0$ et $R_{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

2°) Soit $u = \sum u_n \in S$. Indiquer, en justifiant, une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls qui tend vers $+\infty$ telle que $\sum \alpha_n u_n \in S_C$ dans les cas suivants :

— $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^3}$;
— $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$;
— $u_0 = u_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

On attend une expression simple et explicite pour α_n, qui n'utilise pas les questions suivantes.

3°) Soit $\sum u_n \in S$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.
À quelle condition portant sur la suite (u_n) peut-on définir,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n-1}}}$?
Dans ce cas, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs ou nuls qui tend vers $+\infty$.

4°) Montrer que, pour toute série convergente $\sum u_n$ à termes réels positifs ou nuls, il existe une suite (α_n) de réels positifs ou nuls, tendant vers $+\infty$ en croissant, telle que la série $\displaystyle\sum \alpha_n u_n$ soit convergente.

5°) Soit $u = \sum u_n \in S$. Indiquer, en justifiant, une suite décroissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 telle que $\sum \alpha_n u_n$ diverge, dans les cas suivants :

— $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

— $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$;

— $u_0 = u_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

On attend une expression simple et explicite pour α_n, qui n'utilise pas les questions suivantes.

6°) Montrer que, pour toute série divergente $\sum u_n$ à termes réels positifs ou nuls, il existe une suite décroissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 telle que $\sum \alpha_n u_n$ est encore divergente.

Partie II : Normes sur S_{AC}.

7°) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. Montrer que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors pour toute série $\sum u_n$ à termes réels positifs ou nuls et convergente, la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente.

8°) Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls et majorée.

Pour tout $u = \sum u_n \in S_{AC}$, on pose $N_\alpha(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k |u_k|$.

Montrer que N_α est une norme sur S_{AC} si et seulement si la suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

9°) Soit $\alpha = (\alpha_n)$ et $\beta = (\beta_n)$ les suites definies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $\beta_n = \dfrac{1}{n!}$. Les normes N_α et N_β sont-elles équivalentes sur S_{AC} ?

10°) $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent maintenant deux suites majorées quelconques de réels strictement positifs. Montrer que N_α et N_β sont équivalentes si et seulement si $\alpha_n = O(\beta_n)$ et $\beta_n = O(\alpha_n)$.

11°) $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne à nouveau une suite majorée quelconques de réels strictement positifs. On définit l'application φ par : $\forall u = \displaystyle\sum u_n \in S_{AC},\quad \varphi(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On munit S_{AC} de la norme N_α.
Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 1$, montrer que φ est continue.

Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$, montrer que φ n'est pas continue.
Dans le cas général, donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite α pour que φ soit continue.

12°) On suppose que $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non majorée de réels positifs ou nuls. Montrer qu'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{\varphi(n)} \geq n$. En déduire la réciproque de la question 7.

Partie III : séries absolument convergentes d'ordre p.

Soit ψ l'application de S_{AC} dans S_0 définie par : pour tout $u = \sum u_n \in S_{AC}$,
$\psi(u) = \sum R_n$, où l'on rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
On dira qu'une série $u = \sum u_n$ de S_{AC} est absolument convergente d'ordre 0.
On dira qu'elle est absolument convergente d'ordre 1 si et seulement si la série $\psi(u)$ est absolument convergente.
De proche en proche, pour tout entier $p \geq 1$, on dit que la série $u = \sum u_n$ est absolument convergente d'ordre p si elle est absolument convergente et si la série $\psi(u)$ est absolument convergente d'ordre $p - 1$.

Ainsi, la série $u = \sum u_n$ est absolument convergente d'ordre p si et seulement si les séries u, $\psi(u)$, ..., $\psi^p(u)$ sont absolument convergentes, où $\psi^p = \psi \circ \psi \circ \cdots \circ \psi$ (on compose p fois).

On dit qu'une série est absolument convergente d'ordre infini si et seulement si elle est absolument convergente d'ordre p, pour tout entier naturel p.

13°) Montrer que ψ est une application linéaire.
Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note E_p l'ensemble des séries absolument convergentes d'ordre p.
On note également E_∞ l'ensemble des séries absolument convergentes d'ordre infini.

14°) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que E_p est un sous-espace vectoriel de S_{AC}.
Pour tout $q \in \mathbb{N}$, notons c_q la série $\displaystyle\sum_n \delta_{n,q}$, où $\delta_{n,q}$ vaut 1 lorsque $n = q$ et 0 lorsque $n \neq q$. Exprimer $\psi(c_q)$ en fonction des c_k.
En déduire que E_p est de dimension infinie.
E_∞ est-il aussi de dimension infinie ?

15°) Soit a un nombre complexe non nul, et q un nombre complexe tel que $|q| < 1$.
On note $u = \sum u_n$ la série définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$.
Montrer que u est absolument convergente d'ordre infini.

16°) Soit deux séries $u = \sum u_n$ et $v = \sum v_n$ à termes positifs ou nuls et soit $p \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $u_n \sim v_n$ et si u est absolument convergente d'ordre p, alors v est absolument convergente d'ordre p.

17°) Soit p un entier naturel non nul.

On choisit sur S_{AC} la norme N définie par : $\forall u \in S_{AC},\ \ N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

On note $\begin{array}{cccc} \psi_p : & E_p & \longrightarrow & E_{p-1} \\ & u & \longmapsto & \psi(u) \end{array}$.
Si l'on choisit sur E_p et sur E_{p-1} la norme N, l'application ψ_p est-elle continue ?

18°) Soit $u = \sum u_n$ une série convergente à termes réels positifs ou nuls.
Pour tout entier n, on note encore R_n son reste de Cauchy d'ordre n.
Étant donné un entier naturel n, exprimer la somme partielle d'ordre n de la série $\sum R_k$ en fonction de celle de la série $\sum ku_k$ et de R_n.
Montrer que si u est absolument convergente d'ordre 1 alors $nR_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

19°) Réciproquement, si $u = \sum u_n$ est une série convergente à termes réels positifs ou nuls et si $nR_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, u est-elle convergente d'ordre 1 ?