Feuille d'exercices 16.
Corrigé de deux exercices.

Exercice 16.17 :

1°) Cette équation est équivalente à $f_n(x) = 0$, où f_n est l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - x - n$.
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$,
donc $f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$.
On peut ainsi dresser le tableau de variations (à faire).
Entre 0 et $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$, f_n décroît en partant de $f_n(0) = -n < 0$, donc f_n ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}]$.
$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc d'après le TVI ($f_n$ est bien continue) et le fait qu'une application strictement croissante est injective, f_n s'annule en un unique réel entre $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ et $+\infty$.
Ainsi, l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.

2°) $f_n(2) = 2^n - 2 - n$, or d'après la formule du binôme de Newton,
$2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n}$, car $n \geq 2$, donc $2^n \geq 1 + n + 1$
puis $f_n(2) \geq 0 = f_n(x_n)$, or f_n est strictement croissante sur $[(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}, +\infty[$,
donc $x_n \leq 2$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) et 4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $x_n = e^{\frac{1}{n}\ln(x_n+n)}$, or d'après la question précédente, $x_n = \mathbf{O}(1)$, donc $x_n = e^{\frac{1}{n}\ln(n(1+O(\frac{1}{n})))} = e^{\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}O(\frac{1}{n})} = e^{\frac{\ln n}{n}+o(\frac{\ln n}{n})}$. Ainsi,
$\boxed{x_n = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)}$, ce qui conclut.
On peut poursuivre ce développement asymptotique, même si cela n'est pas demandé.
Ce qui précède montre que $\dfrac{x_n}{n} = \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, donc
$x_n = e^{\frac{1}{n}\ln(n+x_n)} = e^{\frac{1}{n}\ln(n(1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})))} = e^{\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}$, puis
$x_n = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(\frac{u^2}{2})$, en posant $u = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
$u \sim \frac{\ln n}{n}$, donc $u^2 \sim \frac{\ln^2 n}{n^2}$. Ainsi, d'après les croissances comparées, $u = \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})$ et $u^2 = \frac{\ln^2 n}{n^2} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})$, donc $\boxed{x_n = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln^2 n}{2n^2} + o\Big(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\Big)}$.

Exercice 16.21 :

g est croissante. En effet, si $x, y \in [0,1]$ avec $x \leq y$, $f([0,x]) \subset f([0,y])$, donc d'après le cours, $g(x) \leq g(y)$.

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Montrons que g est également uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $x, y \in [0,1]$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \leq y$.

Ainsi, $0 \leq g(y) - g(x)$.

Si $g(y) = g(x)$, alors $0 \leq g(y) - g(x) = 0 \leq \varepsilon$, donc $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

Supposons maintenant que $g(y) > g(x)$. f étant continue sur le compact $[0,y]$, d'après le cours, il existe $\beta_y \in [0,y]$ tel que $g(y) = \sup_{t \in [0,y]} f(t) = f(\beta_y)$.

Si $\beta_y \in [0,x]$, alors $g(y) = f(\beta_y) \leq g(x)$, ce qui est faux, donc $\beta_y \in]x,y]$.

Ainsi, $|\beta_y - x| \leq |y - x| \leq \alpha$, donc $|f(\beta_y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Or $0 \leq g(y) - g(x) \leq f(\beta_y) - f(x)$, car $g(x) \geq f(x)$, donc on a également dans ce cas $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.