Résumé de cours :
Semaine 22 : lundi 10 et vendredi 14 mars.

Dérivation (suite)

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, I un intervalle d'intérieur non vide et f une application de I dans E.

1 Opérations sur les fonctions dérivables (fin)

Dérivée de l'inverse.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ une application dérivable en a. Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

Dérivée logarithmique. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ dérivable en a.
$\frac{f'(a)}{f(a)}$ est appelée la dérivée logarithmique de f en a. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, elle est égale à $(\ln|f|)'(a)$.

Propriété. Si u et v sont dérivables de I dans $\mathbb{K}^*$, $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$, $\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{(u^n)'}{u^n} = n\frac{u'}{u}$, et, si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\frac{(u^\alpha)'}{u^\alpha} = \alpha\frac{u'}{u}$.

2 Dérivées d'ordre supérieur

2.1 Définition

Définition. $f^{(0)} = f$, $f^{(n)}(t) = \left(f^{(n-1)}\right)'(t)$.

Propriété. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, f est $p+q$ fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(p)}$ est q fois dérivable sur I, auquel cas, $f^{(p+q)} = [f^{(p)}]^{(q)}$.

Remarque. On dit que f est n fois dérivable en a si et seulement si il existe une boule ouverte B centrée en a telle que $f|_{B\cap I}$ soit $n-1$ fois dérivable et telle que $[f|_{B\cap I}]^{(n-1)}$ soit dérivable en a.

Définition. On dit que f est de classe D^n (resp : C^n) si et seulement si $f^{(n)}$ est une application définie sur I (resp : définie et continue).
On dit que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Opérations sur les dérivées supérieures

Propriété de linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont D^n, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ est D^n et $[\alpha f + \beta g]^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Formule de Leibniz : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient f une application de I dans E et g une application de I dans F. On dispose de l'application $\begin{array}{rccc} B(f,g): & I & \longrightarrow & G \\ & t & \longmapsto & B(f(t),g(t)) \end{array}$.
Soit $a \in I$; Si f et g sont dérivables n fois en a, $B(f,g)$ est dérivable n fois en a et $B(f,g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a))$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le produit de deux applications C^n est C^n.

Théorème de composition : Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soient $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$ deux applications.
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si φ et f sont C^n alors $f \circ \varphi$ est C^n.
Il faut savoir le démontrer.

3 L'égalité des accroissements finis

Dans ce paragraphe, toutes les applications utilisées sont définies sur I et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Extremum et point critique

Définition. f admet un maximum local en a si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall t \in V \cap I \quad f(t) \leq f(a)$.
f présente en a un maximum local strict si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall t \in V \cap I \setminus \{a\} \quad f(t) < f(a)$.

Définition. Lorsque f est dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$, a est un point critique de f si et seulement si $f'(a) = 0$.

Théorème. Les extremums locaux de f sur $\overset{\circ}{I}$ sont des points critiques de f. Réciproque fausse.
Il faut savoir le démontrer.

3.2 Le lemme de Rolle

Lemme de Rolle. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Le lemme de Rolle est faux pour une application à valeur dans $\mathbb{C}$: prendre $\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$.

Un exercice à connaître : On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si il se décompose sous la forme $P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ avec $i \neq j \Longrightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$. Si P est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' l'est aussi.

Théorème de Rolle généralisé ***(Hors programme).***
Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Si f est dérivable sur $]a,b[$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

3.3 L'égalité des accroissements finis

Théorème des accroissements finis (TAF). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.
Il faut savoir le démontrer.

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

TLD : Si f est continue sur I, dérivable (resp : de classe C^1) sur $I \setminus \{a\}$ et s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \underset{x \in I \setminus \{a\}}{\overset{x \to a}{\longrightarrow}} l$, alors f est dérivable (resp : de classe C^1) sur I, avec $f'(a) = l$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Il faut savoir montrer que, si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x) \underset{x \in I \setminus \{a\}}{\overset{x \to a}{\longrightarrow}} +\infty$, alors f n'est pas dérivable en a.

Remarque. Ce théorème est encore valable pour une fonction à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

TLD : Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur. Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si f est continue sur I, à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, si f est de classe C^k sur $I \setminus \{a\}$ et si, pour tout $h \in [1,k] \cap \mathbb{N}$, il existe $l_h \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(h)}(x) \underset{x \in I \setminus \{a\}}{\overset{x \to a}{\longrightarrow}} l_h$, alors f est de classe C^k sur I.

4 Formules de Taylor

4.1 L'égalité de Taylor-Lagrange (hors programme)

Théorème. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.
Il faut savoir le démontrer.

4.2 L'inégalité des accroissements finis (IAF)

Théorème. Inégalité des accroissements finis (IAF)
Si $f\ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est C^1 sur $[a,b]$, alors $|f(b) - f(a)| \leq \lambda |b-a|$, où $\lambda = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Corollaire. Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et $f\ : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1.
Alors f est k-lipschitzienne si et seulement si pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leq k$.

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 TRI et inégalité de TL

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f\ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ C^{k+1}.
Alors $f(b) = f(a) + \displaystyle\sum_{h=1}^{k} \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt$.

Théorème. Inégalite de Taylor-Lagrange. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f\ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ C^{k+1}.
Alors $|f(b) - f(a) - \displaystyle\sum_{h=1}^{k} \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a)| \leq \lambda \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!}$, où $\lambda = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(k+1)}(x)|$.

4.3.2 Primitivation d'un développement limité

Lemme. Soit $k \in \mathbb{N}$. Au voisinage de a, $\displaystyle\int_a^x o((t-a)^k)dt = o((x-a)^{k+1})$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Primitivation d'un développement limité. Soient $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application de classe C^1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si, au voisinage de a,
$f'(x) = \displaystyle\sum_{h=0}^{k} \alpha_h (x-a)^h + o((x-a)^k)$, alors $f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{h=0}^{k} \frac{\alpha_h}{h+1}(x-a)^{h+1} + o((x-a)^{k+1})$.

4.3.3 Formule de TY

Formule de Taylor-Young. Si f est k fois dérivable en a, alors au voisinage de a,
$f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{h=1}^{k} \frac{(x-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + o((x-a)^k)$.

Propriété. (Hors programme ?) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable en un point a de $\overset{\circ}{I}$. On suppose que $f'(a) = 0$ et que $f''(a) > 0$. Alors a est un minimum local strict : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $t \in V \cap I \setminus \{a\}$, $f(t) > f(a)$.

5 Monotonie et dérivabilité

Ici les applications utilisées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

5.1 Sens de variation

Théorème. f est constante si et seulement si $f' = 0$, elle est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et elle est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et croissante. Alors f est strictement croissante si et seulement si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide. En particulier, si $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf pour un nombre fini d'éléments de I, alors f est strictement croissante.

5.2 Difféomorphismes

Théorème. Supposons que f est dérivable et strictement monotone. Soit $t \in I$.
f^{-1} est dérivable en $f(t)$ si et seulement si $f'(t) \neq 0$, et dans ce cas $\left(f^{-1}\right)'\left(f(t)\right) = \dfrac{1}{f'(t)}$.

Lorsque $[\forall t \in I,\ \ f'(t) \neq 0]$, $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f : I \longrightarrow J$ est un C^n-difféomorphisme si et seulement si f est bijective, de classe C^n et si f^{-1} est aussi de classe C^n.

Propriété. f est un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$ si et seulement si f est de classe C^n et si $[\forall t \in I,\ \ f'(t) \neq 0]$.
Il faut savoir le démontrer.

6 Suites récurrentes d'ordre 1

On souhaite étudier une suite (x_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$.
En étudiant l'application f, supposons que l'on ait déterminé un intervalle I tel que $f : I \longrightarrow I$ est continue et monotone, avec $x_0 \in I$.

Représentation graphique de (x_n) : À connaître .

Propriété. Les valeurs possibles pour la limite de x_n sont les points fixes de $f|_I$ et les bornes de I qui n'appartiennent pas à I.

Propriété. Si $f|_I$ est croissante, alors (x_n) est monotone.
Plus précisément, (x_n) est croissante si et seulement si $f(x_0) - x_0 \geq 0$,
et (x_n) est décroissante si et seulement si $f(x_0) - x_0 \leq 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $f|_I$ est croissante. Soit $l \in I$ un point fixe de f.
Si $x_0 \leq l$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq l$. Si $x_0 \geq l$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq l$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $f|_I$ est décroissante. Alors $(f \circ f)|_I$ est croissante, donc les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $f : I \longrightarrow I$ une application de classe C^1 et $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.
Si $|f'(\ell)| < 1$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x_0 \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$: ℓ est un point d'équilibre stable.
Si $|f'(\ell)| > 1$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x_0 \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \notin]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$: ℓ est un point d'équilibre instable.
Il faut savoir le démontrer.

Plan d'étude d'une suite vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$:
◇ Représentez le tableau des variations de f.
◇ Lorsque le graphe de f est simple, visualisez le comportement de la suite (x_n).
◇ Trouvez un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et $x_0 \in I$ et f est monotone et continue sur I.
◇ Recherchez les "limites éventuelles".
◇ Si f est croissante sur I, étudiez les signes de $f(x_0) - x_0$ et de $x_0 - l$ (où l est un point fixe), puis conclure.
◇ Si f est décroissante sur I, se ramener au cas précédent en considérant $f \circ f$, ou bien si l'on a conjecturé que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $|f'(\ell)| < 1$, majorez $|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)|$ à l'aide du TAF.

7 Fonctions convexes

7.1 Sous-espaces affines

Définition. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction E et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$.
$\mathcal{F}$ est un ***sous-espace affine*** de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $A \in \mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\boxed{\mathcal{F} = A + F = \{A + x \ / \ x \in F\}}$. Dans ce cas, $F = \{\overrightarrow{MN} \ / \ M, N \in \mathcal{F}\}$: on dit que F est la direction du sous-espace affine $\mathcal{F}$. De plus, pour tout $B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = B + F$.

Exemples. Un singleton est un sous-espace affine dirigé par $\{0\}$.
Une droite affine de $\mathcal{E}$ est de la forme $\mathcal{D} = A + \mathbb{K}x$, où $A \in \mathcal{E}$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

Propriété. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. Soit $y \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(E) \; : \; f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$, est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de E

Définition. Deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement si ils ont la même direction.

Propriété. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction E et $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Pour $i \in I$, on note E_i la direction de $\mathcal{E}_i$.
$\displaystyle\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$ est ou bien $\emptyset$, ou bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i$.

Définition. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction E. Un repère de $\mathcal{E}$ est un couple $R = (O, b)$, où O est un point de $\mathcal{E}$, appelé l'origine du repère et où b est une base de E. Si $M \in \mathcal{E}$, les coordonnées de M dans le repère R sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base b.

Définition. Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, $\dim(\mathcal{F}) = \dim(F)$.

7.2 Barycentres et convexité

Notation. On fixe un espace affine $\mathcal{E}$, p points $A_1, \ldots, A_p$ de $\mathcal{E}$ et p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$.

Définition. On appelle fonction vectorielle de Leibniz l'application $\varphi \; : \; \mathcal{E} \longrightarrow E$ définie par $\displaystyle\varphi(M) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{A_i M}$.

Définition. Lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$, φ est constante, et lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$, φ est bijective. L'unique point G tel que $\varphi(G) = 0$ s'appelle alors le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq p}$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$.

On en déduit que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\displaystyle\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$. On note $G \triangleq \dfrac{\lambda_1 A_1 + \cdots \lambda_p A_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Lorsque, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\lambda_i = 1$, G s'appelle l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_p$.

Propriété. ***Homogénéïté du barycentre :***
Si l'on remplace chaque λ_i par $\alpha\lambda_i$ où $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, G n'est pas modifié.

Propriété. ***Associativité du barycentre :*** Soit $k \in \mathbb{N}_p$. Notons G' le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ (on suppose que $\displaystyle\lambda' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$) et G'' le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{k+1\leq i\leq p}$ (on suppose que $\displaystyle\lambda'' = \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i \neq 0$). Alors G est le barycentre de $((G', \lambda'), (G'', \lambda''))$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $A_i \in \mathcal{F}$, alors $G \in \mathcal{F}$.

Propriété. L'ensemble des barycentres de $A_1, \ldots, A_p$ est égale à $A_1 + \mathrm{Vect}((\overrightarrow{A_1 A_i})_{2\leq i\leq p})$.
Il s'agit du plus petit sous-espace affine contenant $\{A_1, \ldots, A_p\}$.

Exemple. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$, la droite (AB) est égale à l'ensemble des barycentres de A et B.

Si A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{E}$, l'ensemble des barycentres de A, B et C est l'unique plan affine contenant ces trois points.

Définition. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{C}^2$, $[A_1, A_2] \subset \mathcal{C}$, où $[A_1, A_2]$ est le segment d'extrémités A_1 et A_2, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de $((A_1, t), (A_2, 1-t))$, lorsque t décrit $[0, 1]$.
2. Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{C}^2$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$, le barycentre de $((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2))$ est dans $\mathcal{C}$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(A_i)_{1 \le i \le p} \in \mathcal{C}^p$, pour tout $(\lambda_i)_{1 \le i \le p} \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$, le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{1 \le i \le p}$ est dans $\mathcal{C}$.

Une partie est donc convexe ssi elle est stable par pour des barycentres pondérés positivement.

Exemple. Les sous-espaces affines sont des convexes.

Propriété. Une intersection de parties convexes est convexe.

Définition. Soit B une partie de $\mathcal{E}$. L'enveloppe convexe de B est le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant B. C'est l'ensemble des barycentres d'un nombre fini de points de B affectés de pondérations positives.