DS 6 : Théorème de Cauchy-Lipschitz discret

Les calculatrices sont interdites.

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I : Séries indexées par $\mathbb{Z}$.

1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ est divergente. Justifier que dans ce cas, on pose $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Ainsi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, la quantité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Lorsque $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{Z}$, on dira que la série indexée par $\mathbb{Z}$ notée $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ est convergente (respectivement : absolument convergente) dans $\mathbb{K}$ si et seulement si les séries usuelles $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{(-k-1)}$ sont convergentes (respectivement : absolument convergentes). Dans ce cas, on notera

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{(-k-1)}.$$

Lorsque, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, u_k est un réel positif, la question 1 permet de considérer que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$ est toujours définie, mais qu'elle est égale à $+\infty$ lorsque l'une des deux séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ ou $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{(-k-1)}$ est divergente.

2°) On suppose que $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille de réels positifs.
Les quantités suivantes étant éventuellement égales à $+\infty$, montrer que

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k &= \sup\left(\left\{\sum_{k=M}^{N} u_k \ / \ M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N\right\}\right) \\ &= \sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k\right).\end{aligned}$$

Montrer également que $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k+1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$.

3°) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.
Montrer que si $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Montrer que la convergence de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ n'implique pas toujours celle de la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$.

Partie II : Quelques espaces de suites.

4°) On note $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ l'ensemble des $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ telles que $\{u_k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{K}$. Lorsque $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|$.
Montrer que $(l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension infinie.

5°) On note $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ l'ensemble des $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ est absolument convergente. Lorsque $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, on pose $\displaystyle\|u\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|$.
Montrer que $(l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K}), \|.\|_1)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension infinie.

6°) Soit $q \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Etudier l'appartenance des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ suivantes à $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ou à $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, en discutant selon les paramètres q et α :

— $u_k = 1$;
— $u_k = q^k$;
— $u_k = q^{|k|}$;
— $u_k = \dfrac{1}{(1+|k|)^\alpha}$.

7°) $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ est-il inclus dans $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$?
$l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ est-il inclus dans $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$?

8°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ et soit $X \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.
On pose $X = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.
Montrer que si $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ dans $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$, mais que la réciproque est fausse.

9°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ et soit $X \in l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.
On pose $X = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.
Montrer que si $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ dans $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$, mais que la réciproque est fausse.

Lorque $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall p \geq N,\ \ \forall q \geq N,\ \ \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

10°) Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E. Montrer que c'est une suite de Cauchy.

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On dit que E est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente.
On admettra que $\mathbb{K}$ est complet.

11°) Montrer que $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est complet.

12°) Montrer que $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est complet.

Partie III : Théorème du point fixe.

On suppose dans cette partie que $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.
On suppose que f est une application k-lipschitzienne de E dans E, avec $k \in [0, 1[$.

13°) Montrer qu'il existe au plus un vecteur $l \in E$ tel que $f(l) = l$ (on dit que l est un point fixe de f).

14°) Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, avec $x_0 \in E$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n \|x_0 - x_1\|$.
Montrer que (x_n) converge et que sa limite est un point fixe de f.

15°) Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est une application bijective de E dans E.

Partie IV : L'opérateur shift.

Pour tout $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, on pose $S(u) = (u_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$. S s'appelle l'opérateur shift.

16°) Montrer que S est un automorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

17°) Montrer que par restriction, S définit sur $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et sur $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ des automorphismes continus. Ces restrictions seront encore notées S par la suite.

Jusqu'à la fin du problème, p désigne 1 ou bien ∞ et E désigne $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

18°) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \neq 1$.
Montrer que $S - \alpha \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E.

On fixe un élément $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.
On fixe également un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et $N + 1$ réels $a_0, \ldots, a_N$, avec $a_N \neq 0$.
On suppose de plus qu'il existe $j_0 \in \{0, \ldots, N\}$ tel que $a_{j_0} > \sum_{\substack{0\leq j\leq N \\ j\neq j_0}} |a_j|$.

On cherche à résoudre l'équation (1) : $\forall k \in \mathbb{Z},\ b_k = \sum_{j=0}^{N} a_j x_{k+j}$, où l'inconnue est la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

19°) On pose $P_0 = \sum_{j=0}^{N} a_j X^j$. Montrer que le polynôme P_0 n'a aucune racine complexe de module 1.

On admettra que la question 19 permet d'affirmer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ tels que $P_0 = a_N(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_N)$, où pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, $|\alpha_j| \neq 1$.

20°) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'équation (1) possède une unique solution.

21°) Montrer que c'est encore vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.