Feuille d'exercices 17.
Quelques corrigés d'exercices

Exercice 17.8 :
Pour n suffisamment grand, $2n^2+an+1>0$, donc $\sum a_n$ est définie, quitte à la tronquer à un ordre convenable.
$a_n=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1})=\sin(\frac{an\pi+\pi}{4n^2+2an+2})$,
donc $a_n=\sin(\frac{\pi}{4n}\frac{a+\frac{1}{n}}{1+\frac{a}{2n}+\frac{1}{2n^2}})=\sin(\frac{\pi}{4n}(a+\mathbf{O}(\frac{1}{n})))$,
donc $a_n=\frac{a\pi}{4n}+\mathbf{O}(\frac{1}{n^2})$.
Si $a\neq 0$, $\sum a_n$ diverge, car $\displaystyle\sum\frac{1}{n}$ diverge et $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ converge, et si $a=0$, $\sum a_n$ converge.

Exercice 17.14 :
$u_n\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
[Ici, les séries $\sum u_n$ et $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'ont pas nécessairement la même nature, car elles ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang. Cependant, cet équivalent n'est pas complètement inutile.]
On en déduit que $|u_n|\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. Elle est divergente ou semi-convergente.
[l'équivalent précédent ne permet pas de conclure. On recherche donc une information asymptotique plus fine.]

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})} \\ &= (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{n})\right)\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right). \end{aligned}$$

ainsi $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$.
$-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\sim-\frac{1}{n}$, donc $\displaystyle\sum(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))$ est divergente. D'autre part, d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, donc $\sum u_n$ est une série divergente.

Exercice 17.18 :

1°) Par récurrence, on montre que $u_n \in [0,1]$: en effet, $u_0 = 1$ et si $u_n \in [0,1]$, alors $u_{n+1} = \sin(u_n) \in [0,1]$.
Sur $\mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$, donc (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge vers l tel que $\sin(l) = l$, avec $l \in [0,1]$.
Si $x \in [0,1]$, $\sin(x) = x + \dfrac{x^3}{6}\sin^{(3)}(c_x)$, où $c_x \in]0,x[$, donc $\sin(x) < x$. Ainsi, $l = 0$.

2°) Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$.
$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = (u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^\alpha - u_n^\alpha$, car $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc
$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha((1 - \dfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^\alpha - 1) = -\dfrac{\alpha}{6}u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2})$.
Avec $\alpha = -2$, $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \dfrac{1}{3} + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.

3°) D'après les moyennes de Cesaro, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k^{-2} - u_{k-1}^{-2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$, or la dernière somme est télescopique, donc $\dfrac{1}{nu_n^2} - \dfrac{1}{nu_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$, or $\dfrac{1}{nu_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n^{-2} \sim \dfrac{n}{3}$ et $u_n \sim \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 17.22 :

On pose $t = 1 - x$, de sorte que t tend vers 0 lorsque x tend vers 1. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1 - t + \sqrt{1-t}} \\
&= (1 - t + (1 - \tfrac{t}{2} + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\tfrac{t^2}{2} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\
&= (2 - \tfrac{3t}{2} - \tfrac{t^2}{8} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}(1 - \tfrac{3t}{4} - \tfrac{t^2}{16} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}(1 - \tfrac{3t}{4}(1 + \tfrac{t}{12} + o(t))\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}.\tfrac{9t^2}{16}(1 + o(1))) \\
&= \sqrt{2} - \tfrac{3\sqrt{2}}{8}t - \sqrt{2}\tfrac{t^2}{16}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{8}) + o(t^2),
\end{aligned}$$

donc $f(x) = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-1) - \frac{13\sqrt{2}}{128}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

Exercice 17.28 :

1°) Pour tout $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, donc f est croissante entre 0 et e puis décroissante entre e et $+\infty$ (représenter ceci en traçant le tableau de variations de f). De plus, lorsque x varie entre 0 et e, $f(x)$ varie de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$, puis lorsque x varie de e à $+\infty$, $f(x)$ décroît de $\frac{1}{e}$ à 0.
f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x \in]0,e[$ tel que $f(x) = -n$.

2°) f réalise une bijection continue strictement croissante de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}_-^*$, donc f^{-1} est également continue et strictement croissante et $x_n = f^{-1}(-n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème de la limite monotone.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\ln(x_n) + nx_n = 0$, donc en ajoutant $\ln n$, on obtient que $\ln n = \ln(nx_n) + nx_n$,
or $nx_n = -\ln x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition et d'après les croissances comparées, $\ln(nx_n) = o(nx_n)$.
Ainsi, $\ln n = \ln(nx_n) + nx_n \sim nx_n$, ce qui montre que $\boxed{x_n \sim \frac{\ln n}{n}}$.
Remarque : On peut poursuivre le développement asymptotique :
$x_n = -\frac{1}{n}\ln(x_n) = -\frac{1}{n}\ln(\frac{\ln n}{n} x_n \frac{n}{\ln n}) = -\frac{1}{n}(\ln(\ln n) - \ln n + o(1))$,
donc $x_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(\ln n)}{n} + o(\frac{1}{n})$.