Feuille d'exercices 18.
Dérivation et convexité

Exercice 18.1 : (niveau 1)
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :
$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $f(x) = |\ln x|$, $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ et $f(x) = x|x|$.

Exercice 18.2 : (niveau 1)
Etudiez les suites (x_n) de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Exercice 18.3 : (niveau 1)
Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\left| x \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right| \leq \frac{1}{6}(x-1)^3$.

Exercice 18.4 : (niveau 1)
Pour $t \neq 0$ on pose $f(t) = \dfrac{1}{e^t - 1} - \dfrac{1}{t}$. Prolongez f par continuité en 0 ; ce prolongement est-il dérivable, est-il de classe C^1 ?

Exercice 18.5 : (niveau 1)
E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C_1 et C_2 sont deux parties convexes de E.
On note C l'ensemble des milieux des couples de points (A_1, A_2) où $A_1 \in C_1$ et $A_2 \in C_2$.
Montrer que C est convexe.

Exercice 18.6 : (niveau 1)
Déterminez les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes et bornées.

Exercice 18.7 : (niveau 1)
Etudiez les suites (x_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a^2}{x_n}),$$

où $a > 0$.

Exercice 18.8 : (niveau 1)
Soit f une application C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour laquelle il existe $a \in]0,1]$ tel que $f(a)f'(a) < 0$. Montrez qu'il existe $b \in]0,1]$ tel que $f'(b) = 0$.

Exercice 18.9 : (niveau 2)
Montrer que $x \longmapsto x^2 \tan \frac{1}{x} \sin \frac{2}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0. Cette fonction est-elle de classe C^1 en 0 ?

Exercice 18.10 : (niveau 2)
Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \dfrac{1+2u_n}{1+3u_n}$.
Etudiez (u_n) et donnez un équivalent.

Exercice 18.11 : (niveau 2)
Donner l'exemple d'un couple (f, g), où f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non dérivables sur $\mathbb{R}$ en entier, mais telles que $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18.12 : (niveau 2)
Soit f une application paire et dérivable, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = f(\sqrt{x})$.
Lorsque f est deux fois dérivable en 0, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Est-ce encore vrai sans supposer que f est deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 18.13 : (niveau 2)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

1°) On suppose que f est strictement convexe sur I.
Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au plus deux solutions.

2°) On suppose seulement que f est convexe sur I. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$?

Exercice 18.14 : (niveau 2)
On considère deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Si f et g sont continues, montrer que $\max(f, g)$ est également continue.

2°) Lorsque f et g sont dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$, à quelle condition $\max(f, g)$ est-elle dérivable en x_0 ?

Exercice 18.15 : (niveau 2)
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, où I désigne un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On suppose que f est dérivable sur I.

1°) Soit $(a, b) \in I^2$. On suppose que $f'(a) < 0$ et que $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2°) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle (c'est le théorème de Darboux).

Exercice 18.16 : (niveau 2)
Etudiez les suites telles que : $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$.

Exercice 18.17 : (niveau 2)

1°) Soient f et g deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$.

2°) *R*ègle de l'Hôpital.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in I$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall t \in V \cap (I \setminus \{a\})\ \ g'(t) \neq 0$.
Montrer que s'il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\dfrac{f'(t)}{g'(t)} \underset{\substack{t\to a\\ t\neq a}}{\longrightarrow} l$ alors $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{\substack{t\to a\\ t\neq a}}{\longrightarrow} l$.

Exercice 18.18 : (niveau 3)

1°) Déterminer l'ensemble des applications $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

2°) Déterminer l'ensemble des applications $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)^2$.

Exercice 18.19 : (niveau 3)
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1°) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall t \in \mathbb{R}^*\ \ f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{3n}} exp\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n) et donner le degré de P_n.
2°) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f^{(n)}(0) = 0$.
3°) Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles.

Exercice 18.20 : (niveau 3)
Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, strictement croissante et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a_n) = 0$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 18.21 : (niveau 1)
Etudier les suites (x_n) de réels vérifiant la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{x_n}$.

Exercice 18.22 : (niveau 1)
Donnez un exemple d'application définie sur $\mathbb{R}$ admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 18.23 : (niveau 1)
Démontrez les inégalités suivantes :
$\forall t \in \mathbb{R}\ |e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$; $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$;
$\forall t \in]1, +\infty[\ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t$.

Exercice 18.24 : (niveau 2)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée n-ième de l'application $x \longmapsto e^{x \mathrm{ch} a} \mathrm{ch}(x \mathrm{sh} a)$.

Exercice 18.25 : (niveau 2)
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\arctan(t)$.

Exercice 18.26 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$.

2°) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$.

Exercice 18.27 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, il existe un unique $\theta(t) \in]0, 1[$ vérifiant $\sin t = t - \frac{t^3}{6} \cos(t\theta(t))$.

2°) Montrer que $\theta(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Exercice 18.28 : (niveau 2)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'une primitive n-ème de f sur $\mathbb{R}$, notée $f^{[n]}$, et démontrer que l'on peut prendre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f^{[n]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

Exercice 18.29 : (niveau 2)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable.
1°) Montrez que si f' est bornée, f est uniformément continue.
2°) Montrez que si $|f'(x)| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, f n'est pas uniformément continue.

Exercice 18.30 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$: c'est le n-ième polynôme de Legendre. Montrer qu'il est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18.31 : (niveau 2)
Soit f une application convexe et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$: On pose $g(x) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$. Montrez que g est convexe.

Exercice 18.32 : (niveau 2)
Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 18.33 : (niveau 2)
Etudiez les suites réelles (u_n) vérifiant : $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice 18.34 : (niveau 3)
Soit f une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $f(0) = 0$ et telle que $f'(x) \in [0,1]$ pour tout $x \geq 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^x f^3(t)dt \leq \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$.

Exercice 18.35 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que
$\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0.
Indication. On pourra commencer par étudier le cas où $f(0) = 0 = a$.

Exercice 18.36 : (niveau 3)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; f(\dfrac{x+y}{2}) \leq \dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$. Montrez que f est convexe.

Exercice 18.37 : (niveau 3)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f^{(2k+1)}(t) \geq 0$.

Pour tout $a \in I$ et $x \in I$, on pose $T_a(x) = \displaystyle\sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-a)^h}{h!} f^{(h)}(a)$.

Montrer que pour tout $a, a' \in I$ avec $a < a'$, $T_{a'} - T_a$ est convexe sur I.

Exercice 18.38 : (niveau 3)
Lemme de Grönwall :
Soit f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que g est positive et qu'il existe $x_0, K \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geq x_0$,
$f(x) \leq K + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)g(t)\ dt$.
Montrer que, pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \leq K\exp\Big(\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\ dt\Big)$.

Exercice 18.39 : (niveau 3)
Soit $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de cardinal infini. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f^{(2k+1)}(t) \neq 0$.
Pour tout $\alpha \in I$ et $x \in I$, on pose $T_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-\alpha)^h}{h!} f^{(h)}(\alpha)$.
Montrer que les graphes des applications T_α sont deux à deux disjoints.

Exercice 18.40 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \longmapsto \dfrac{f(x+y) - f(x-y)}{2y}$ est constante sur $\mathbb{R}^*$. On notera $g(x)$ cette constante.
Sauf pour la dernière question, on suppose que g est une application continue sur $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que f est dérivable et que $f' = g$.

2°) Quelles sont les valeurs possibles pour f ?

3°) Reprendre l'exercice en supposant maintenant que g est localement bornée.

Exercice 18.41 : (niveau 3)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.
On recherche les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ f \circ f(x) = ax + b.$$

1°) Si $a < 0$, montrez qu'il n'y a aucune solution.

2°) Notons $\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$.
Montrez que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
Pour $n \in \mathbb{Z}$ calculez h^n (au sens de la composition).

3°) On suppose que $a \in]0, 1[$.
Montrez que $h^{-1} \circ f \circ h = f$.
En déduire les expressions possibles de f.

4°) Achevez la résolution de l'exercice.

Exercice 18.42 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall t \in \mathbb{R}\ \ f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrez que la dérivée n-ième de f est de la forme :
$f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Prouvez les relations :
$P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - (2n+1)XP_n$; $\forall n \geq 1\ \ P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$; $(1+X^2)P_n'' - (2n-1)XP_n' + n^2 P_n = 0$. En déduire que $P_n = \sum\limits_{0 \leq 2k \leq n} a_k X^{n-2k}$ avec $a_0 = (-1)^n n!$ et $a_p = (-1)^{n+p}\dfrac{n!n(n-1)...(n-2p+1)}{4^p(p!)^2}$.
Montrez que les racines de P_n sont réelles et simples.

Exercice 18.43 : (niveau 3)
Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \exists n_x \in \mathbb{N},\ \ f^{(n_x)}(x) = 0.$$