Résumé de cours :
Semaine 23, du 17 au 21 mars.

Fonctions convexes

1 Inégalités de convexité

Notation. On fixe une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition. f est convexe si et seulement si
$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.
f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Interprétation géométrique. f est convexe si et seulement si, pour tout $x, y \in I$ avec $x < y$, le graphe de $f|_{[x,y]}$ est au dessous de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut également définir la stricte convexité et la stricte concavité, en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte lorsque $\alpha \in]0, 1[$.

Propriété. f est concave et convexe si et seulement si elle est affine, i.e de la forme $x \longmapsto \alpha x + \beta$.

Propriété. Une somme d'un nombre fini d'applications convexes est convexe.

Définition. $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ est un point d'inflexion de f si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f|_{I\cap]x_0-\varepsilon,x_0]}$ est convexe (resp : concave) et $f|_{I\cap[x_0,x_0+\varepsilon[}$ est concave (resp : convexe).

Propriété. L'épigraphe de f est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$.
f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété. ***Inégalité de Jensen.*** f est convexe si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n \ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n \ , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Longrightarrow f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Il faut savoir le démontrer.

> **Exercice.** Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$ est inférieure à la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
> Il faut savoir le démontrer.

2 Croissance des pentes

Propriété. Lorsque $x, y \in I$ avec $x \neq y$, on pose $p_x(y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = p_y(x)$: c'est la pente de la corde d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I.
2. Pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_a(b) \leq p_a(c)$.
3. Pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_b(a) \leq p_b(c)$.
4. Pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_c(a) \leq p_c(b)$.

Ainsi, f est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$ l'application p_{x_0} est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. (Hors programme) Si f est convexe sur I, elle est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\overset{\circ}{I}$. En particulier, elle est continue sur $\overset{\circ}{I}$.
Il faut savoir le démontrer.

3 Fonctions convexes dérivables

Propriété. Si f est dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si $\forall x \in I \ \ f''(x) \geq 0$.

Propriété. On suppose que f est deux fois dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.
Si f'' change de signe au voisinage de x_0, alors x_0 est un point d'inflexion de f.

Les équations différentielles

4 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On s'intéresse aux équations différentielles $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$ en l'inconnue y, où I est un intervalle, et où a et b sont deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$.
(H) est l'équation homogène (ou bien l'équation sans second membre, ESSM) associée à (E).

Définition. les courbes intégrales de (E) sont les graphes des solutions de (E).

Définition. Soit $y_0 \in \mathbb{K}$ et $t_0 \in I$. Le problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0, y_0) est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E = \{y_0 + y / y \in S_H\} \stackrel{\Delta}{=} y_0 + S_H$. On dit que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).
Il faut savoir le démontrer.

Principe de superposition des solutions : Si y_1 (resp : y_2) est solution de $(E_1) : y' = a(t)y + b_1(t)$ (resp : de $(E_2) : y' = a(t)y + b_2(t)$), alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation $y' = a(t)y + \alpha b_1(t) + \beta b_2(t)$.

Théorème. Notons A une primitive de a. Alors $y' = a(t)y \iff [\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{A(t)}]$.
Il faut savoir le démontrer.

Méthode de variation de la constante : avec les notations précédentes, on pose $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Alors $(E) \iff \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)$. Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout problème de Cauchy relatif à (E), il y a existence et unicité d'une solution.

Principe de superposition des solutions : On suppose que $b = b_1 + b_2$, où b_1 et b_2 sont deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Notons (E_1) et (E_2) les équations différentielles suivantes : (E_1) : $y' = a(t)y + b_1(t)$ et $(E_2) : y' = a(t)y + b_2(t)$.
Supposons que z_1 est une solution de (E_1) et que z_2 est une solution de (E_2).
Alors $z_1 + z_2$ est une solution de (E).

Définition. On suppose que c est une troisième application continue de I dans $\mathbb{K}$. On note (F) l'équation différentielle $c(t)y' = a(t)y + b(t)$.
(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 **non résolue**, alors que (E) est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue.

Soit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que t_0 est l'unique "zéro" de c sur I.

Notons $I_g = I \cap]-\infty, t_0[$ et $I_d = I \cap]t_0, +\infty[$.

Sur I_g et sur I_d, $(F) \iff y' = \dfrac{a(t)}{c(t)}y + \dfrac{b(t)}{c(t)}$, ce qui nous ramène à une équation résolue.
Supposons que y_g est une solution de (F) sur I_g et que y_d est une solution de (F) sur I_d. On dit que y_g et y_d *se raccordent* en t_0 en une solution y sur I si et seulement si y est une solution sur I dont les restrictions sur I_g et I_d sont y_g et y_d.

Propriété. Reprenons les notations de la définition précédente. y_g et y_d se raccordent en t_0 en une solution de (F) définie **et de classe** C^1 sur I en entier si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
- (1) : Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $y_g(t) \underset{t \to t_0^-}{\longrightarrow} \ell$ et $y_d(t) \underset{t \to t_0^+}{\longrightarrow} \ell$;
- (2) : Il existe $\ell' \in \mathbb{K}$ tel que $y_g'(t) \underset{t \to t_0^-}{\longrightarrow} \ell'$ et $y_d'(t) \underset{t \to t_0^+}{\longrightarrow} \ell'$.

5 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

5.1 Équations à coefficients quelconques

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme $(E) \ : \ y" = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ où a, b, c sont trois applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'équation homogène associèe est $(H) \ : \ y" = a(x)y' + b(x)y$.

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E = \{y_0 + y / y \in S_H\} \overset{\Delta}{=} y_0 + S_H$.

Définition. Soit $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On appelle problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y_0') le problème de la recherche des solutions de (E) telles que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz.
Pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y_0').

Propriété. S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{K}^I$.

Cas particulier où on connaît une solution φ_1 de (H) ne s'annulant pas sur I : on pose $y(x) = \lambda(x)\varphi_1(x)$. Alors (E) est équivalente à une équation linéaire d'ordre 1 en λ'.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. On suppose que d est une quatrième application continue de I dans $\mathbb{K}$. On note (F) l'équation différentielle $d(x)y" = a(x)y' + b(x)y + c(x)$.

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que x_0 est l'unique "zéro" de d sur I.

Notons $I_g = I\cap]-\infty, x_0[$ et $I_d = I\cap]x_0, +\infty[$.
Sur I_g et sur I_d, $(F) \iff y'' = \dfrac{a(x)}{d(x)}y'(x) + \dfrac{b(x)}{d(x)}y(x) + \dfrac{c(x)}{d(x)}$, ce qui nous ramène à une équation différentielle résolue linéaire d'ordre 2.
Supposons que y_g est une solution de (F) sur I_g et que y_d est une solution de (F) sur I_d. On dit que y_g et y_d *se raccordent* en x_0 en une solution y sur I si et seulement si y est une solution de (F) sur I dont les restrictions sur I_g et I_d sont y_g et y_d.

Propriété. Reprenons les notations de la définition précédente. y_g et y_d se raccordent en x_0 en une solution définie **et de classe** C^2 sur I en entier si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :
- (1) : Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $y_g(t) \underset{t\to t_0^-}{\longrightarrow} \ell$ et $y_d(t) \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} \ell$;
- (2) : Il existe $\ell' \in \mathbb{K}$ tel que $y_g'(t) \underset{t\to t_0^-}{\longrightarrow} \ell'$ et $y_d'(t) \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} \ell'$;
- (3) : Il existe $\ell'' \in \mathbb{K}$ tel que $y_g''(t) \underset{t\to t_0^-}{\longrightarrow} \ell''$ et $y_d''(t) \underset{t\to t_0^+}{\longrightarrow} \ell''$.

5.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici, $(E) : y" + ay' + by = f(x)$, où $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, et où a et b sont des constantes.
L'équation homogène associée est $(H) : y" + ay' + by = 0$.

5.2.1 Résolution de (H) : Il faut savoir le démontrer.

$\chi = X^2 + aX + b$ est appelé le polynôme caractéristique de (H) ou de (E).
• *Premier cas.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$ ou bien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$.
Dans ce cas, χ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, notées λ et μ.
Alors $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{K}^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \ y(x) = ue^{\lambda x} + ve^{\mu x}$.
• *Second cas.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$. Alors $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \alpha - i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \ y(x) = ue^{\alpha x}\cos\beta x + ve^{\alpha x}\sin\beta x$.
• *Troisième cas.* Si $\Delta = 0$: χ admet une racine double notée λ.
Alors $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{K}^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \ y(x) = e^{\lambda x}(u + xv)$.

5.2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tels que
$\forall x \in I \quad f(x) = e^{\lambda x}P(x)$. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x}Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque λ n'est pas racine de χ, avec $m = 1$ lorsque λ est une racine simple de χ et avec $m = 2$ lorsque λ est une racine double de χ.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour les équations différentielles de la forme $(E)\ :\ y' + by = e^{\lambda x}P(x)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$: (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x}Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque $\lambda \neq -b$ et $m = 1$ lorsque $\lambda = -b$ (dans ce cas, $\chi = X + b$).

Remarque. Lorsque $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x)\cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$, ou bien de la forme $f(x) = P(x)\sin(\omega x)$, on peut appliquer ce qui précède en se ramenant à $x \longmapsto P(x)e^{i\omega x}$.

Remarque. Plus généralement, lorsque $f(x)$ est de la forme $P(x)e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, on peut chercher une solution particulière de la forme $H(x)e^{Q(x)}$, où H est aussi un polynôme.

6 Compléments hors programme

6.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Notation. On suppose que f est une application à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$. On note (E) l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. C'est la forme générale d'une équation différentielle résolue d'ordre 1.
y est une solution de (E) si et seulement si y est une application à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur un intervalle I de cardinal infini inclus dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.
À noter que l'intervalle I est lui-même une inconnue de (E).

Définition. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est maximale si et seulement si il n'existe pas de prolongement strict de y en une solution de (E).

Définition. Soit $(t_0, y_0) \in U$. On appelle "problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0, y_0)" la recherche des solutions y de (E) telles que $y(t_0) = y_0$.

Théorème. On suppose que f est continue sur U et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie et continue sur U.
Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy relatif à (E) et à (t_0, y_0). Cette solution est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Toute autre solution du même problème de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.