DS 6 : un corrigé

Barème : sur 49 points.
Partie I : sur 6 points : 1, 3, 2.
Partie II : sur 20 points : 4, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 4, 3.
Partie III : sur 9 points : 1, 5, 3.
Partie IV : sur 14 points : 1, 2, 4, 1, 4, 2.

Partie I : Séries indexées par $\mathbb{Z}$.

1°) La suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante divergente de réels positifs, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\sum_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci justifie l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

2°) $\diamond$ Commençons par montrer que ces différentes quantités sont bien définies.
$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{k=M}^{N} u_k \ / \ M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc d'après le cours, cet ensemble possède une borne supérieure à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que l'on notera S pour cette question.
De même, $\mathcal{S}' = \left\{ \sum_{k=-N}^{N} u_k \ / \ N \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{S}'$ possède un sup éventuellement égal à $+\infty$, que l'on notera S'.
De plus la suite $\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de réels, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle possède une limite éventuellement égale à $+\infty$.
$\diamond$ Toujours d'après le théorème de la limite monotone, $\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} S'$, ce qui montrer la dernière égalité.

$\diamond$ Clairement, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, donc d'après le cours, $S' \leq S$.

$\diamond$ Soit $M, N \in \mathbb{Z}$ avec $M \leq N$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $[M, N] \cap \mathbb{Z} = [-P, P] \cap \mathbb{Z}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k \in \mathbb{R}_+$, donc $\displaystyle\sum_{k=M}^{N} u_k \leq \sum_{k=-P}^{P} u_k = \sum_{k=0}^{P} u_k + \sum_{k=0}^{P-1} u_{-k-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=M}^{N} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{(-k-1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$ est un majorant de $\displaystyle\left\{ \sum_{k=M}^{N} u_k \ / \ M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}$, donc est plus grand que le plus petit des majorants, qui par définition de la borne supérieure est égale à S (par la suite, ce raisonnement sera résumé sous l'appellation de "passage à la borne supérieure"). On a donc montré que $\displaystyle S \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$.

$\diamond$ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=-N}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=0}^{N-1} u_{-k-1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k, \text{ donc } S' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k.$$

On a montré que $\displaystyle S' \leq S \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = S'$, donc

$\displaystyle S = S' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = \lim_{N \to +\infty} \Big(\sum_{k=-N}^{N} u_k \Big)$, ce qu'il fallait montrer.

$\diamond$ D'après la première égalité appliquée à la suite $(u_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k+1} &= \sup \left(\left\{ \sum_{k=M}^{N} u_{k+1} \ / \ M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) \\
&= \sup \left(\left\{ \sum_{k=M+1}^{N+1} u_k \ / \ M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) \\
&= \sup \left(\left\{ \sum_{k=M}^{N} u_k \ / \ M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k.
\end{aligned}$$

3°) $\diamond$ Supposons que $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k$ est absolument convergente. Cela signifie que les séries usuelles $\sum u_n$ et $\sum u_{-n-1}$ sont absolument convergentes. D'après le cours sur les séries, on peut affirmer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n-1}$ sont convergentes, donc d'après l'énoncé, la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k$ est convergente.

$\diamond$ Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, posons $u_k = \frac{1}{k}$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=-1}^{-N} \frac{1}{k} = 0$, donc la suite $\displaystyle\Big(\sum_{k=-N}^{N} u_k\Big)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Cependant, d'après le cours, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge, donc la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ n'est pas convergente.

Partie II : Quelques espaces de suites.

4°) $\diamond$ La suite identiquement nulle est bornée, donc $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est non vide.
Soit $u, v \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|\alpha u_k + v_k| \leq |\alpha||u_k| + |v_k| \leq |\alpha|\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. On en déduit que $\alpha u + v \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, donc que $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'après le cours.
$\diamond$ On en déduit également par passage à la borne supérieure
que $\|\alpha u + v\|_\infty \leq |\alpha|\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.
En particulier avec $\alpha = 1$, on obtient l'inégalité triangulaire.
En particulier avec $v = 0$, on obtient que $\|\alpha u\|_\infty \leq |\alpha|\|u\|_\infty$. De plus, si $\alpha \neq 0$, en remplaçant dans cette inégalité le couple (α, u) par le couple $(\frac{1}{\alpha}, \alpha u)$, on obtient $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha u\|_\infty$, ce qui prouve que $\|\alpha u\|_\infty = |\alpha|\|u\|_\infty$. De plus cette dernière égalité est évidente lorsque $\alpha = 0$, donc on a prouvé l'homogénéïté de $\|.\|_\infty$.
De plus, pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, il est clair que $\|u\|_\infty \geq 0$
et que $\|u\|_\infty = 0 \iff \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| = 0 \iff u = 0$.
Ceci démontre que $\|.\|_\infty$ est bien une norme sur $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $c_n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}}$. c_n est clairement un élément de $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$. D'après le cours, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ (l'ensemble des suites presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$), donc en particulier c'est une famille libre de $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$. Elle est de cardinal infini, donc $l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est de dimension infinie. On peut redémontrer que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre : soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n c_n = 0$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. La k-ième composante de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n c_n$ vaut $\displaystyle 0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \delta_{n,k} = \alpha_k$, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

5°) $\diamond$ La série identiquement nulle est absolument convergente, donc $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est non vide. Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha u_k + v_k| \leq |\alpha||u_k| + |v_k|$, or par linéarité des séries usuelles, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}(|\alpha||u_k| + |v_k|)$ converge, donc la série usuelle $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}(\alpha u_k + v_k)$ est absolument convergente. De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\alpha u_{-1-k} + v_{-1-k}| \leq |\alpha||u_{-1-k}| + |v_{-1-k}|$ et on en déduit également que la série usuelle $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}(\alpha u_{-1-k} + v_{-1-k})$ est absolument convergente.

Ainsi, on a montré que $\alpha u+v \in l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, donc que $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

$\diamond$ On en déduit aussi par sommation que $\|\alpha u+v\|_1 \leq |\alpha|\|u\|_1 + \|v\|_1$, puis comme lors de la question précédente, on montre que $\|.\|_1$ satisfait l'inégalité triangulaire et la propriété d'homogénéïté.

De plus, pour tout $u \in l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, il est clair que $\|u\|_1 \geq 0$

et si $\|u\|_1 = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k| \in \left\{ \sum_{k=M}^{N} |u_k| \ / \ M,N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}$,

donc $|u_k| \leq \sup\left(\left\{ \sum_{k=M}^{N} u_k \ / \ M,N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}\right) = \|u\|_1 = 0$, donc $u = 0$. Ceci démontre que $\|.\|_1$ est bien une norme sur $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.

$\diamond$ Avec les notations définies lors de la question précédente, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \in l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, donc on en déduit à nouveau que $l^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est de dimension infinie.

6°) $\diamond$ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{u_k = 1}$. La série usuelle $\sum 1$ diverge grossièrement, donc $\boxed{u \notin l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$. Cependant, il est clair que $\boxed{u \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\diamond$ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{u_k = q^k}$.

$\boxed{\text{Si } |q| > 1}$, alors $|q^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\boxed{u \notin l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$ et par divergence grossière, $\boxed{u \notin l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\boxed{\text{Si } |q| < 1}$, avec $q \neq 0$ par hypothèse, alors $|q^{-1-n}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\boxed{u \notin l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$ et $\boxed{u \notin l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\boxed{\text{Si } |q| = 1}$, par divergence grossière, $\boxed{u \notin l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|q^n| = 1$, donc $\boxed{u \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\diamond$ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{u_k = q^{|k|}}$.

$\boxed{\text{Si } |q| > 1}$, alors $|q^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\boxed{u \notin l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$ et par divergence grossière, $\boxed{u \notin l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\boxed{\text{Si } |q| < 1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k| = |q|^{|k|} \leq 1$, donc $\boxed{u \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$. De plus, d'après le cours sur les séries géométriques, $\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_{-1-k}|$ sont convergentes, donc $\boxed{u \in l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\boxed{\text{Si } |q| = 1}$, par divergence grossière, $\boxed{u \notin l^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|q^n| = 1$, donc $\boxed{u \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

$\diamond$ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{u_k = \frac{1}{(1+|k|)^\alpha}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k| = e^{-\alpha\ln(1+|k|)} \leq 1$, donc $\boxed{u \in l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$.

De plus, lorsque k tend vers $+\infty$, $|u_k| = u_k \sim \frac{1}{k^\alpha}$ et $|u_{-k-1}| \sim \frac{1}{k^\alpha}$, donc d'après le cours

sur les séries de Riemann, $\boxed{\text{lorsque } \alpha > 1,\ u \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \text{ et lorsque } \alpha \leq 1,\ u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})}$
.

7°) La suite constante égale à 1 est dans $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ mais elle n'appartient pas à $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, donc $\boxed{l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \not\subset l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})}$.

Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Les séries usuelles $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$ et $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |u_{-1-k}|$ sont convergentes, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'$, $|u_{-n}| \leq \varepsilon$. Avec $\varepsilon = 1$, on en déduit qu'il existe $N, N' \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq 1$ et pour tout $n \geq N'$, $|u_{-n}| \leq 1$. Posons $M = \max\limits_{n\in]-N',N[\cap\mathbb{N}} |u_n|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(M, 1)$, donc $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Ceci prouve que $\boxed{l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \subset l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})}$.

8°) $\diamond$ Supposons que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ dans $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.
$|x_{n,k} - x_k| \leq \sup\limits_{h\in\mathbb{Z}} |x_{n,h} - x_h| = \|X_n - X\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par principe des gendarmes, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, posons $x_{n,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } |k| \leq n \\ 0 \text{ si } |k| > n \end{cases}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $x_k = 1$.
Ainsi, $X \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Lorsque $n \geq |k|$, $x_{n,k} = 1$, donc $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = x_k$.
Cependant, Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $x_k - x_{n,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } |k| \leq n \\ 1 \text{ si } |k| > n \end{cases}$, donc
$\|X_n - X\|_\infty = 1$, ce qui prouve que X_n ne converge pas vers X lorsque n tend $+\infty$.
Ce contre-exemple établit que la réciproque est fausse.

9°) $\diamond$ Supposons que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ dans $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.
$|x_{n,k} - x_k| \leq \sum\limits_{h=-\infty}^{+\infty} |x_{n,h} - x_h| = \|X_n - X\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par principe des gendarmes, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = c_n$ (cf question 4).
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} = \delta_{n,k}$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Lorsque $n > |k|$, $x_{n,k} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Posons $X = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, avec, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$, $X \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.
Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|X_n - X\|_1 = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k}| = 1$, donc X_n ne tend pas vers X lorsque n tend vers $+\infty$.
Ce contre-exemple établit que la réciproque est fausse.

10°) On suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors par inégalité triangulaire,
$\|x_p - x_q\| = \|(x_p - \ell) + (\ell - x_q)\| \leq \|x_p - \ell\| + \|x_q - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
donc la suite (x_n) est une suite de Cauchy de E.

11°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.
Fixons $h \in \mathbb{Z}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$. Mais $|x_{p,h} - x_{q,h}| \leq \|X_p - X_q\|_\infty$, donc $|x_{p,h} - x_{q,h}| \leq \varepsilon$. Ceci démontre que la suite $(x_{n,h})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, or $\mathbb{K}$ est complet, donc il existe $x_h \in \mathbb{K}$ tel que $x_{n,h} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_h$, lorsque h est fixé.
Soit à nouveau $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$.
Fixons $k \in \mathbb{Z}$ et $p \geq N$. Faisons tendre q vers $+\infty$. Comme $x_{q,k} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$, on déduit de l'inégalité précédente que $|x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$, donc la suite $(x_{p,k} - x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et (1) : $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$.
Posons $X = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. On vient d'établir que, pour $p \geq N$, $X_p - X \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, or $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, donc $X = X_N - (X_N - X) \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.
Alors (1) s'écrit $\|X_p - X\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$.
On a montré que toute suite de Cauchy de $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est convergente, donc $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est complet.

12°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \|X_p - X_q\|_1$, donc la première partie de la question précédente s'adapte.
Ainsi, il existe $X = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^\mathbb{Z}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_1 \leq \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=-M}^{M} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}| = \|X_p - X_q\|_1 \leq \varepsilon$.
Fixons $M \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq N$. Faisons tendre q vers $+\infty$. Comme $x_{q,k} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$, on déduit de l'inégalité précédente que $\displaystyle\sum_{k=-M}^{M} |x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$, donc d'après la question 2, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_{p,k} - x_k|$ est convergente et en passant au sup dans l'inégalité (1), $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$.
On vient d'établir que, pour $p \geq N$, $X_p - X \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, or $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, donc $X = X_N - (X_N - X) \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.
Alors (1) s'écrit $\|X_p - X\|_1 \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$.
On a montré que $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est complet.

Partie III : Théorème du point fixe.

13°) Soit $l, l' \in E$. Supposons que l et l' sont deux points fixes de f.
Alors $\|l - l'\| = \|f(l) - f(l')\| \leq k\|l - l'\|$, donc $(1-k)\|l - l\| \leq 0$, or $1 - k > 0$, donc $\|l - l'\| \leq 0$. Ceci prouve que $l = l'$. Ainsi, si f admet un point fixe, il est unique.

14°) $\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ la propriété suivante : $\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n\|x_0 - x_1\|$.
$R(0)$ est évidente car $k^0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $R(n-1)$ est vraie.
Alors $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq k^n\|x_0 - x_1\|$, d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci prouve $R(n)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n\|x_0 - x_1\|$.
$\diamond$ Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Par télescopage, $x_p - x_q = \displaystyle\sum_{i=p}^{q-1}(x_i - x_{i+1})$, donc d'après l'inégalité triangulaire, $\|x_p - x_q\| \leq \displaystyle\sum_{i=p}^{q-1}\|x_i - x_{i+1}\|$. Alors d'après le point précédent,

$$\|x_p - x_q\| \leq \sum_{i=p}^{q-1} k^i\|x_0 - x_1\| = \|x_0 - x_1\|k^p\frac{1 - k^{q-p}}{1-k} \leq k^p\frac{\|x_0 - x_1\|}{1-k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. $k \in [0, 1[$, donc $k^n\dfrac{\|x_0 - x_1\|}{1-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $k^n\dfrac{\|x_0 - x_1\|}{1-k} \leq \varepsilon$.
Soient $p \geq N$ et $q \geq N$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $q \geq p$.
Alors $\|x_p - x_q\| \leq k^p\dfrac{\|x_0 - x_1\|}{1-k} \leq \varepsilon$.
$\diamond$ (x_n) est donc une suite de Cauchy, or E est complet, donc la suite (x_n) converge vers une limite $l \in E$. De plus, f est continue car elle est k-lipschitzienne, donc $x_{n+1} = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$. Or par composition des limites, $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Ainsi, par unicité de la limite, $l = f(l)$.

15°) Soit $y \in E$. Pour tout $x \in E$, $x - f(x) = y \iff f(x) + y = x \iff g(x) = x$, en posant $\begin{array}{rccc} g: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & f(x) + y \end{array}$.
Pour tout $x, x' \in E$, $\|g(x) - g(x')\| = \|f(x) - f(x')\| \leq k\|x - x'\|$, donc on peut appliquer les deux questions précédentes en remplaçant f par g.
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, donc il possède au moins un élément, par exemple 0. On peut ainsi poser $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$. On sait alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ où l est un point fixe de g. Ceci montre donc l'existence d'un point fixe de g et ce dernier est unique d'après la question 13. Ainsi, l'équation $x - f(x) = y$, en l'inconnue $x \in E$ avec y fixé, possède une unique solution. Ceci prouve que $\mathrm{Id}_E - f$ est une bijection.

Partie IV : L'opérateur shift

16°) Soit $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Posons $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} S(\alpha u + v) &= S((\alpha u_k + v_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = (\alpha u_{k+1} + v_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} \\ &= \alpha(u_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} + (v_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} = \alpha S(u) + S(v), \end{aligned}$$

donc S est un endomorphisme sur $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.
Notons R l'application de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même définie par : pour tout $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, $R(u) = (u_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est clair que, pour tout $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, $S(R(u)) = R(S(u)) = u$, donc R et S sont deux bijections, réciproques l'une de l'autre.
Ceci démontre que S est un automorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

17°) $\diamond$ Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. $\{u_{k-1} \ / \ k \in \mathbb{Z}\} = \{u_k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$, donc la suite $S(u)$ est bornée. Ainsi, $S(u) \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, ce qui prouve que S après restriction réalise un endomorphisme sur $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Il en de même pour R, donc S après restriction est encore un automorphisme sur $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.
De plus, $\|S(u)\|_\infty = \sup(\{u_{k-1} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}) = \|u\|_\infty$.
En particulier, pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, $\|S(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, donc d'après le cours, l'application linéaire S est continue.
$\diamond$ Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

D'après la fin de la question 2, (1) : $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_{k+1}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k| = \|u\|_1$.

Si l'on pose $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} = S(u)$, on en déduit que les sommes partielles des séries $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} |v_k|$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} |v_{(-k-1)}|$ sont majorées par $\|u\|_1$, donc que ces séries sont absolument convergentes. Ainsi, $S(u) \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et d'après la relation (1), $\|S(u)\|_1 = \|u\|_1$. C'est encore vrai avec R, en adaptant la question 2, donc comme avec $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, on en déduit que S après restriction est un automorphisme continu sur $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

18°) $\diamond$ $S - \alpha \mathrm{Id}_E = -\alpha(\mathrm{Id}_E - \frac{1}{\alpha}S)$: supposons d'abord que $|\alpha| > 1$.
Alors, pour tout $u, v \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, d'après la question précédente,
$\|\frac{1}{\alpha}S(u) - \frac{1}{\alpha}S(v)\|_p = \frac{1}{|\alpha|}\|S(u-v)\|_p = \frac{1}{|\alpha|}\|u - v\|_p$, donc $\frac{1}{\alpha}S$ est k-lipschitzienne avec $k = \frac{1}{|\alpha|} \in]0, 1[$. D'après les questions 11 et 12, $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est complet, donc d'après la question 15, $\mathrm{Id}_E - \frac{1}{\alpha}S$ est bijective. De plus, $-\alpha\mathrm{Id}_E$ est un automorphisme d'après le cours, donc par composition, $S - \alpha\mathrm{Id}_E = (-\alpha\mathrm{Id}_E) \circ (\mathrm{Id}_E - \frac{1}{\alpha}S)$ est un automorphisme de E.
$\diamond$ Supposons maintenant que $|\alpha| < 1$.
Alors $S - \alpha\mathrm{Id}_E = S \circ (\mathrm{Id}_E - \alpha S^{-1}) = S \circ (\mathrm{Id}_E - \alpha R)$.
Comme précédemment, on montre que αR est $|\alpha|$-lipschitzienne, avec $|\alpha| \in [0, 1[$, donc $\mathrm{Id}_E - \alpha R$ est une bijection, puis par composition, $S - \alpha\mathrm{Id}_E$ est encore un automorphisme de E.

19°) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_0. Alors $0 = P_0(z) = a_{j_0}z^{j_0} + \displaystyle\sum_{\substack{0\leq j\leq N \\ j\neq j_0}} a_j z^j$, donc par inégalité triangulaire, $|a_{j_0}||z|^{j_0} \leq \sum_{\substack{0\leq j\leq N\\ j\neq j_0}} |a_j||z|^j$.

Supposons que $|z| = 1$. Alors l'inégalité précédente devient $|a_{j_0}| \leq \sum_{\substack{0\leq j\leq N\\ j\neq j_0}} |a_j|$ ce qui est faux car l'énoncé suppose que $a_{j_0} > \sum_{\substack{0\leq j\leq N\\ j\neq j_0}} |a_j|$. Ainsi, z n'est pas de module 1.

20°) $\diamond$ Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in E$. Lorsque $j \in \mathbb{N}$, notons S^j l'opérateur de E obtenu en composant S avec lui-même j fois. Par récurrence, on montre aisément que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $S^j(x) = (x_{k+j})_{k\in\mathbb{Z}}$. On en déduit que $\left(\sum_{j=0}^{N} a_j x_{k+j}\right)_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{j=0}^{N} a_j S^j(x)$, donc l'équation (1) s'écrit : $b = \sum_{j=0}^{N} a_j S^j(x)$, ou encore $b = P_0(S)(x)$,
en convenant que, lorsque $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n X^n$ est un polynôme à coefficients complexes, $P(S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n S^n$.

$\diamond$ Pour résoudre cette question, il suffit donc de montrer que $P_0(S)$ est une bijection de E dans E. Nous allons montrer, que
(2) : $P_0(S) = a_N(S - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \circ (S - \alpha_2 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (S - \alpha_N \mathrm{Id}_E)$. Cela permettra de conclure car, pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, $|\alpha_i| \neq 1$ d'après la question précédente, donc d'après la question 18, $S - \alpha_i \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E, et par composition, on en déduit que $P_0(S)$ est également un automorphisme de E.

$\diamond$ Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n X^n$ un polynôme à coefficients complexes, où (p_n) est donc une suite presque nulle de complexes. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Posons $Q = (X - \alpha)P$.

En convenant que $p_{-1} = 0$, $Q(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n X^{n+1} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha p_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (p_{n-1} - \alpha p_n) X^n$,
donc $Q(S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (p_{n-1} - \alpha p_n) S^n$.

Par ailleurs, en calculant dans l'algèbre $L(E)$,

$$\begin{aligned}(S - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ P(S) &= S \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n S^n - \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n S^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n S^{n+1} - \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n S^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (p_{n-1} - \alpha p_n) S^n,\ \text{donc on a établi que,}\end{aligned}$$

pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $[(X - \alpha)P](S) = (S - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ P(S)$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, pour tout $M \in \mathbb{N}$, pour tout $\beta_1, \ldots, \beta_M \in \mathbb{C}$, $\left[\left[\prod_{j=1}^{M} (X - \beta_j)\right] P\right](S) = (S - \beta_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (S - \beta_M \mathrm{Id}_E) \circ P(S)$.

Appliquons cette égalité lorsque $P = a_N$, $M = N$, $(\beta_1, \dots, \beta_N) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. On obtient $P_0(S) = (S - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \circ (S - \alpha_2 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (S - \alpha_N \mathrm{Id}_E) \circ P(S)$, ce qui conclut cette question car avec $P = a_N = a_N X^0$, $P(S) = a_N S^0 = a_N \mathrm{Id}_E$.

21°) $\diamond$ *Existence :* Notons $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ l'unique solution de l'équation (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Par hypothèse, $b_k \in \mathbb{R}$, donc $b_k = \mathrm{Re}(b_k) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{j=0}^{N} a_j z_{k+j}\Big) = \sum_{j=0}^{N} a_j \mathrm{Re}(z_{k+j})$. Ainsi, la suite $(\mathrm{Re}(z_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une solution de (1).
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|\mathrm{Re}(z_k)| \leq |z_k|$, donc $(\mathrm{Re}(z_k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. On a donc prouvé l'existence d'une solution de (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.
$\diamond$ *Unicité :* $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \subset l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, donc si x et y sont deux solutions de (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, ce sont aussi deux solutions de (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, donc d'après l'unicité de la question précédente, $x = y$.
En conclusion, on a montré que l'équation (1) admet une unique solution dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Elle est égale à l'unique solution dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, dont les composantes sont donc réelles.