DM 43 : corrigé

Première partie.

1°)

$\diamond$ $F(1)$ est défini si et seulement si la série $\sum u_n(1)$ est définie et convergente.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = \sum_{n=1}^{N}(f(n+1) - f(n))$. C'est une somme télescopique, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = f(N+1) - f(1)$. Ainsi, $F(1)$ est défini si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}}{\longrightarrow} \ell$. Dans ce cas, $F(1) = \ell - f(1)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1(n) = \left(\dfrac{1}{\frac{1}{n^\alpha} + 1}\right)^n = e^{-n\ln(1+n^{-\alpha})}$.
   - Supposons que $\alpha \leq 0$. Alors $-n\ln(1+n^{-\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $f_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: (C_1) est vérifiée et $F(1) = -\frac{1}{2}$.
   - Supposons que $\alpha > 0$. Alors $n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln(1+n^{-\alpha}) = n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha})$, puis $f_1(n) = e^{-n^{1-\alpha}+o(n^{1-\alpha})}$.
     - Si $0 < \alpha < 1$, $f_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (C_1) est vérifiée et $F(1) = -\frac{1}{2}$.
     - Si $\alpha = 1$, $f_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e}$, donc (C_1) est vérifiée et $F(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$.
     - Si $\alpha > 1$, $f_1(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc (C_1) est vérifiée et $F(1) = \frac{1}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_2(n) = \sin(\sqrt{n}\frac{\pi}{2})$,
   donc $f_2((2n+1)^2) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$: cette suite extraite possède 1 et -1 comme valeurs d'adhérence, donc elle diverge, ce qui implique la divergence de la suite $(f_2(n))$: la condition (C_1) n'est pas vérifiée.
3. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_3(n) = (-1)^n \sin(\sqrt{n}\frac{\pi}{2})$,
   donc $f_3((2n+1)^2) = (-1)^{(2n+1)^2} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^{n+1}$: la condition (C_1) n'est pas vérifiée.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_4(n) = \sin\left(\dfrac{n^4+1}{n^2+1}\pi\right) = \sin\left(\dfrac{(n^4-1)+2}{n^2+1}\pi\right)$, donc

$f_4(n) = \sin\left(\left[n^2 - 1 + \frac{2}{n^2+1}\right]\pi\right) = (-1)^{n^2-1}\sin\left(\frac{2}{n^2+1}\pi\right)$, or $\frac{2}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_4(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la condition (C_1) est vérifiée et $F(1) = 0$.

2°)
$\diamond$ $F(2)$ est défini si et seulement si $\sum u_n(2)$ est définie et convergente. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$\sum_{n=1}^{N} u_n(2) = \sum_{n=1}^{N}(f(n+2) - f(n)) = \sum_{n=1}^{N}(f(n+2) - f(n+1)) + \sum_{n=1}^{N}(f(n+1) - f(n))$. Ce sont des sommes télescopiques, donc $\sum_{n=1}^{N} u_n(2) = f(N+2) + f(N+1) - f(1) - f(2)$.
Ainsi, $F(2)$ est défini si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(n+1) + f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\longrightarrow} \ell$.
$\diamond$ Si $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(n+1) + f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ell$, donc $(C_1) \Longrightarrow (C_2)$.
La réciproque est fausse. Par exemple lorsque $f(x) = \cos(\pi x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = (-1)^n$, donc (C_1) est fausse, mais $f(n+1) + f(n) = 0$, donc (C_2) est vraie.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin a + \sin b = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$, donc
$f_3(n+1) + f_3(n) = 2\sin\left(\frac{4n+2+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\frac{\pi}{2}\right)$, ainsi
$|f_3(n+1) + f_3(n)| \leq 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\frac{\pi}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $f_3(n+1) + f_3(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la condition (C_2) est vérifiée
et $F(2) = -f(1) - f(2) = 1 - \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right)$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_2(n) = (-1)^n f_3(n)$,
donc $f_2(n) - f_2(n+1) = (-1)^n(f_3(n) + f_3(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, si l'on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f_2(n) + f_2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $f_2(n) = \frac{1}{2}((f_2(n) + f_2(n+1)) + (f_2(n) - f_2(n+1))$ converge également, ce qui est faux d'après la question précédente. La condition (C_2) n'est donc pas vérifiée pour f_2.

3°) **a)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $F(p)$ est défini si et seulement si $\sum u_n(p)$ est définie et convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{n=1}^{N} u_n(p) = \sum_{n=1}^{N}(f(n+p) - f(n)) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=0}^{p-1}(f(n+i+1) - f(n+i))$, donc
$\sum_{n=1}^{N} u_n(p) = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{N}(f(n+i+1) - f(n+i)) = \sum_{i=0}^{p-1}(f(N+i+1) - f(i+1))$.
Ainsi, $F(p)$ est défini si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} f(n+i) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\longrightarrow} \ell$.

b) $\diamond$ $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}(f(n) - f(n)) = 0$.
$\diamond$ On suppose que (C_1) est vérifiée.
Alors il est clair que (C_p) est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} F(p+1)-F(p) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(f(n+p+1)-f(n)) - \sum_{n=1}^{+\infty}(f(n+p)-f(n)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(f(n+p+1)-f(n+p)) = \lim_{n\to+\infty} f(n) - f(p+1). \end{aligned}$$

$\diamond$ On en déduit que $F(p+1)-F(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°) $\diamond \sum f(n)$ converge, donc $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi (C_1) est vérifiée, donc (C_p) est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$.
$\diamond$ D'après la question précédente, $F(p+1)-F(p) = -f(p+1)$,
donc $\sum(F(p+1)-F(p))$ converge.
$\diamond$ De plus $\sum_{p=0}^{+\infty}(F(p+1)-F(p)) = -S$.

Deuxième partie.

Dans cette partie, on suppose que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^*$ et qu'il existe trois constantes $N \in \mathbb{N}^*$, $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]1,+\infty[$ telles que

$$\forall x \geq N,\ \ |f'(x)| \leq \frac{K}{x^\alpha}.$$

1°) Soit x un réel fixé distinct d'un entier strictement négatif.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x+n \neq 0$, donc $u_n(x) = f(n+x)-f(n)$ est définie.
D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à f, supposée de classe C^1, entre n et $x+n$, il existe $y \in [\min(n,n+x),\max(n,n+x)]$ tel que $f(n+x)-f(n) = xf'(y)$.
Supposons que $n \geq \max(N, N-x)$. Ainsi, $y \geq N$, donc $|f(n+x)-f(n)| \leq |x|\dfrac{K}{y^\alpha}$.
Si $x \geq 0$, $y \geq n$, donc $|f(n+x)-f(n)| \leq |x|\dfrac{K}{n^\alpha}$.
Si $x < 0$, $y \geq n+x$, donc $|f(n+x)-f(n)| \leq |x|\dfrac{K}{(n+x)^\alpha} \sim |x|\dfrac{K}{n^\alpha}$.
Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum(f(n+x)-f(n))$ est absolument convergente, ce qui prouve que F est définie en x.
b) $\diamond$ En particulier, $F(1)$ est définie, donc d'après la question I.1, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(p) \underset{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbb{N}^*}}{\longrightarrow} \ell$.
$\diamond$ Soit $x \in [1,+\infty[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in [\lfloor x \rfloor, x]$ tel que $f(x) - f(\lfloor x \rfloor) = (x - \lfloor x \rfloor)f'(c_x)$ (c'est évident lorsque $\lfloor x \rfloor = x$), donc lorsque $x \geq N$, ce qui implique également $\lfloor x \rfloor \geq N$, $|f(x)-f(\lfloor x \rfloor)| \leq |x - \lfloor x \rfloor|\dfrac{K}{c_x^\alpha} \leq \dfrac{K}{\lfloor x \rfloor^\alpha}$, or $\dfrac{1}{\lfloor x \rfloor^\alpha} \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in[1,+\infty[}}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $f(x) - f(\lfloor x \rfloor) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in[1,+\infty[}}{\longrightarrow} 0$.

Or par composition des limites, $f(\lfloor x \rfloor) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in[1,+\infty[}}{\longrightarrow} \ell$,

donc $f(x) = (f(x) - f(\lfloor x \rfloor)) + f(\lfloor x \rfloor) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in[1,+\infty[}}{\longrightarrow} \ell$.

2°) **a)** $\diamond$ Lorsque $y \geq N$, $|f'(y)| \leq \dfrac{K}{y^\alpha} \leq \dfrac{K}{N^\alpha}$, donc $f'|_{]N,+\infty[}$ est bornée. De plus $f'|_{[1,N]}$ est continue et $[1, N]$ est un compact, donc $f|_{[1,N]}$ est aussi bornée. On en déduit que $\{|f'(y)| \;/\; y \in [1, +\infty[\}$ est majoré, or c'est un ensemble non vide de réels, donc d'après la propriété de la borne supérieure, cet ensemble possède bien une borne supérieure, que l'on notera A.

$\diamond$ $S_N(x) - S_N(x') = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(f(x+n) - f(x'+n))$, or pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $c_n \in [x+n, x'+n]$ tel que $f(x+n) - f(x'+n) = (x-x')f'(c_n)$.
Alors $|f(x+n) - f(x'+n)| \leq |x - x'|A$,

donc $|S_N(x) - S_N(x')| = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} |f(x+n) - f(x+n')| \leq \sum_{n=1}^{N} |x-x'|A = NA|x-x'|$

b) $\diamond$ De même, pour tout $n > N$, il existe $c_n \in [x+n, x'+n]$ tel que $|f(x+n) - f(x'+n)| = |x-x'|\,|f'(c_n)| \leq |x-x'|\dfrac{K}{c_n^\alpha} \leq |x-x'|\dfrac{K}{n^\alpha}$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, donc $\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}(f(x+n) - f(x'+n))\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x-x'|\frac{K}{n^\alpha}$, donc $\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}(f(x+n) - f(x'+n))\right| \leq C|x-x'|$, où $C = K \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

$\diamond$ Par inégalité triangulaire,

$|F(x) - F(x')| \leq |S_N(x) - S_N(x')| + \left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}(f(x+n) - f(x'+n))\right| \leq L|x-x'|$, où $L = NA + C$.

c) $F|_{\mathbb{R}_+}$ est ainsi L-lipschitzienne, donc elle est continue.

3°) On fixe un réel x distinct d'un entier strictement négatif.

a) $\diamond$ $F(x+1) - F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f(x+n+1) - f(x+n)) = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(x+1)$, car c'est une somme télescopique. Ainsi, (1) : $F(x) = F(x+1) + f(x+1) - \displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

$\diamond$ F et f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, $x \longmapsto F(x+1) + f(x+1)$ est continue sur $]-1, 0]$, donc l'expression ci-dessus prouve que F est continue sur $]-1, 0]$.

$\diamond$ Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $R(p)$ l'assertion suivante : F est continue sur $]-(p+1), -p[$.
Pour $p = 0$, on vient de montrer $R(0)$.
Pour $p \geq 0$, supposons $R(p)$. Alors par composition, $x \longmapsto F(x+1) + f(x+1)$ est continue sur $]-(p+2), -(p+1)[$ et la relation (1) prouve alors $R(p+1)$.
D'après le principe de récurrence, F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$, $F(x) - f(x+1) = F(x+1) - \lim_{t \to +\infty} f(t)$, or F est continue en 0, donc $F(x) - f(x+1) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} F(0) - \lim_{t \to +\infty} f(t) = -\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
Par ailleurs, en convenant que $f(0) = 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(0) - \lim_{t \to +\infty} f(t) = -\lim_{t \to +\infty} f(t),$$

donc $F(x) - f(x+1) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)]$.

c) Posons $\ell = \lim_{t \to +\infty} f(t)$. Soit p est un entier strictement positif.

$$\begin{aligned} F(x+p) - F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+x+p) - f(n+x)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{p-1} (f(n+x+i+1) - f(n+x+i)) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+x+i+1) - f(n+x+i)), \end{aligned}$$

car toutes ces séries sont convergentes.

Ainsi, $F(x+p) - F(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (\ell - f(x+i+1)) = p\ell - \sum_{i=0}^{p-1} f(x+i+1)$.

On en déduit que $F(x) - f(x+p) = F(x+p) + \sum_{i=0}^{p-2} f(x+i+1) - p\ell$, donc

$F(x) - f(x+p) \underset{x \to -p}{\longrightarrow} F(0) + \sum_{i=1}^{p-1} f(-p+i) - p\ell$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)] &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{p-1} (f(n-i-1) - f(n-i)) = \sum_{i=0}^{p-1} (f(-i) - \ell) \\ &= -p\ell + \sum_{j=1}^{p-1} f(-p+j), \end{aligned}$$

donc en convenant que $f(0) = 0$, $F(x) - f(x+p) \underset{x \to -p}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)]$.

4°) a) $\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $G(-x) = F(-x) - F(x) + f(-x)$, or f est impaire, donc $G(-x) = -(F(x) - F(-x) + f(x)) = -G(x)$. Ainsi G est impaire.
$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $G(x+1) = F(x+1) - F(-x-1) + f(x+1)$, or en tenant compte du fait que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, la relation (1) établie au II.3.a devient (1) : $F(x) = F(x+1) + f(x+1)$. Ainsi, $G(x+1) = F(x) - F(-x-1)$.
De plus, remplaçant x par $-x-1$ dans (1), on obtient $F(-x-1) = F(-x) + f(-x)$, donc $G(x+1) = F(x) - F(-x) + f(x) = G(x)$. Ainsi, G est périodique de période 1.
b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors $G(x) - f(x+p) = G(x+p) - f(x+p) = F(x+p) - F(-(x+p))$,

mais F est continue en 0, donc $G(x) - f(x+p) \underset{x\to -p}{\longrightarrow} 0$.

c) $\diamond$ Supposons d'abord que $p \in \mathbb{N}^*$. F étant continue en p,

$$\begin{aligned} G(x) - f(x+p) &= [F(x) - f(x+p)] - F(-x) + f(x) \\ &\underset{x\to -p}{\longrightarrow} \lim_{t\to -p} [F(t) - f(t+p)] - F(p) - f(p), \end{aligned}$$

donc d'après la question précédente, $\lim\limits_{t\to -p} [F(t) - f(t+p)] = F(p) + f(p)$.

Alors, d'après la question II.3.c, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)] = F(p) + f(p)$.

Or $F(p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+p) - f(n))$, donc

$$f(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n+p)] = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq p}}^{+\infty} [f(n-p) - f(n+p)] - f(2p).$$

On a bien montré que $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq p}}^{+\infty} [f(n+p) - f(n-p)] = -f(p) - f(2p)$.

$\diamond$ Supposons maintenant que $p \in \mathbb{Z}_-^*$. Alors $-p \in \mathbb{N}^*$, donc d'après le point précédent, $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq -p}}^{+\infty} [f(n-p) - f(n-(-p))] = -f(-p) - f(-2p)$, puis à l'aide de l'imparité de f, $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq |p|}}^{+\infty} [f(n+p) - f(n-p)] = -f(p) - f(2p)$.

5°) $\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donc pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$. De plus f est impaire et tend vers 0 en $+\infty$, donc f vérifie les conditions de l'énoncé et l'on peut utiliser la formule de la question précédente.

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2 - p^2} = \dfrac{1}{(X-p)(X+p)}$: il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{X^2 - p^2} = \dfrac{a}{X-p} + \dfrac{b}{X+p}$. On calcule $a = \Big(\dfrac{1}{X+p}\Big)(p) = \dfrac{1}{2p}$ et $b = -\dfrac{1}{2p}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\dfrac{1}{n^2 - p^2} = -\dfrac{1}{2p}\Big(\dfrac{1}{n+p} - \dfrac{1}{n-p}\Big)$.

Ainsi la question précédente appliquée à f montre que s_1 est définie et que $s_1 = -\dfrac{1}{2p}(-f(2p) - f(p)) = \dfrac{3}{4p^2}$.

$\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \dfrac{\varepsilon(x)}{\sqrt{|x|}}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$. De plus f est impaire et tend vers 0 en $+\infty$, donc f vérifie les conditions de l'énoncé et l'on peut utiliser la formule de la question précédente.

Ainsi s_2 est définie et $s_2 = -f(2p) - f(p) = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2p}}$.

$\diamond$ Décomposons la fraction rationnelle $F = \dfrac{X}{(X^2-1)^2}$ en éléments simples : il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $F = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{(X+1)^2}$.

$F(X) = -F(-X) = \dfrac{c}{X-1} - \dfrac{d}{(X-1)^2} + \dfrac{a}{X+1} - \dfrac{b}{(X+1)^2}$, donc par unicité de la décomposition en éléments simples, $c = a$ et $b = -d$.

De plus $b = \left(\dfrac{X}{(X+1)^2}\right)(1) = \dfrac{1}{4}$.

Par ailleurs, $tF(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $0 = a + c = 2a$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\dfrac{n}{(n^2-1)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(n-1)^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \dfrac{\varepsilon(x)}{x^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| = \dfrac{2}{x^3}$. De plus f est impaire et tend vers 0 en $+\infty$, donc f vérifie les conditions de l'énoncé et l'on peut utiliser la formule de la question précédente.

Ainsi, s_3 est définie et $s_3 = \dfrac{1}{4}(f(2) + f(1)) = \dfrac{5}{16}$.