

Feuille d'exercices 18.

Correction de trois exercices

Exercice 18.15 :

1°) Supposons que $f|_{[a,b]}$ est injective. f étant dérivable, elle est continue. On sait alors que $f|_{[a,b]}$ est strictement monotone. Mais $f'(a) < 0$, donc $f'(b) \leq 0$, ce qui est faux. Ainsi, $f|_{[a,b]}$ n'est pas injective, donc il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ avec $\alpha < \beta$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$. D'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2°) Une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe. Il s'agit donc de montrer que, si $(A, B) \in f'(I)^2$ avec $A < B$, $[A, B] \subset f'(I)$.

Soit $C \in]A, B[$. Il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $A = f'(a)$ et $B = f'(b)$.

$f'(a) - C = A - C < 0$ et $f'(b) - C > 0$.

Notons $g(t) = f(t) - Ct$. g est définie et dérivable sur I . De plus, $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$.

Appliquons le résultat de la première question en substituant f par g . Il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f'(c) - C$, donc $C = f'(c) \in f'(I)$. Ainsi, $[A, B] \subset f'(I)$.

Exercice 18.16 :

Posons $f(x) = \sqrt{2-x}$. f est décroissante et continue sur $] -\infty, 2]$.

◇ Si $x_0 > 2$, x_1 n'est pas défini.

◇ Si $x_0 < -2$, x_2 n'est pas défini.

◇ Pour la suite, on suppose que $x_0 \in [-2, 2]$.

$f([-2, 2]) = [0, 2] \subset [-2, 2]$, donc la suite (x_n) est bien définie et elle est à valeurs dans $[-2, 2]$.

$f(l) = l \iff l = \sqrt{2-l} \iff (l \geq 0 \text{ et } l^2 + l - 2 = 0)$. Or $l^2 + l - 2 = (l-1)(l+2)$, donc $f(l) = l \iff l = 1$.

• Première méthode : Graphiquement, on devine que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On démontre alors cette propriété par majoration de $|x_n - 1|$.

$f([0, 2]) = [0, \sqrt{2}]$, donc dès que $n \geq 2$, $x_n \in [0, \sqrt{2}]$. Alors,

$$|x_{n+1} - 1| = |\sqrt{2-x_n} - 1| = \left| \frac{2-x_n-1}{\sqrt{2-x_n}+1} \right| \leq \frac{|x_n - 1|}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1},$$

donc $|x_n - 1| \leq \frac{|x_2 - 1|}{(\sqrt{2-\sqrt{2}}+1)^{n-2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

• Deuxième méthode : On étudie $f \circ f$. On suppose que $x_0 \in [0, \sqrt{2}]$.

$f \circ f(x) \geq x \iff x^2 \leq 2 - \sqrt{2-x} \iff 2 - x^2 \geq \sqrt{2-x} \iff 4 + x^4 - 4x^2 \geq 2 - x$, donc $f \circ f(x) \geq x \iff x^4 - 4x^2 + x + 2 \geq 0 \iff (x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 2) \geq 0 \iff (x-1)(x+2)(x^2 - x - 1) \geq 0$.

$\Delta = 5$, donc les racines de $x^2 - x - 1$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ainsi, sur $[0, \sqrt{2}]$, $x^2 - x - 1 < 0$.
 Supposons que $x_0 \in [0, 1[$. $[0, 1]$ est stable par $f \circ f$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} \in [0, 1]$.
 De plus, sur $[0, 1]$, $f \circ f(x) - x \geq 0$, donc (x_{2n}) est croissante et majorée par 1. Ainsi cette suite converge vers un point fixe de $f \circ f$, qui en l'occurrence est nécessairement 1. Ainsi, $x_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. De même, on montre que $x_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Le cas où $x_0 \in]1, \sqrt{2}]$ se traite de la même façon.

Exercice 18.43 :

Les polynômes sont solutions du problème. Il s'agit de montrer que ce sont les seules.

◇ Commençons par établir le lemme suivant :

Si f est une application non polynomiale de classe C^∞ sur un intervalle I infini, alors il existe $a, b \in I$ avec $a < b$ tels que $f|_{[a,b]}$ est non polynomiale et ne s'annule jamais. En effet :

- prop 1 : Soit f une application qui coïncide avec un polynôme P sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et avec un polynôme Q sur un intervalle $[c, d]$ (avec $c < d$).

Si $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$, alors $P = Q$.

Démonstration : si $[a, b] \cap [c, d]$ est infini, $P - Q$ possède une infinité de racines, donc $P = Q$.

Sinon, $[a, b] \cap [c, d]$ étant un intervalle (cours) non vide, il est réduit à un singleton, donc en supposant que $a < b$ et que $c < d$, on a $b = c$ ou bien $d = a$. Sans perte de généralité, supposons que $a < b = c < d$.

D'après la formule de Taylor pour les polynômes, au voisinage de b ,

$$P(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x-b)^n}{n!} P^{(n)}(b) = f(x) \text{ lorsque } x \text{ est au voisinage à gauche de } b$$

$$\text{et } Q(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x-b)^n}{n!} Q^{(n)}(b) = f(x) \text{ lorsque } x \text{ est au voisinage à droite de } b.$$

Alors, par unicité du développement limité et d'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(b) = f^{(n)}(b) = Q^{(n)}(b)$, donc $P = Q$.

- prop 2 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, $f|_{[a,x]}$ est polynomiale. Alors $f|_{[a,b]}$ est polynomiale.

Démonstration : par hypothèse, pour tout $x \in]a, b[$, $f|_{[a,x]}$ coïncide avec un polynôme P_x , mais d'après la prop 1, pour tout $x, y \in]a, b[$, $P_x = P_y$. Notons P ce polynôme commun.

Pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) = f|_{[a,x]}(x) = P(x)$, donc $f|_{[a,b]}$ coïncide avec le polynôme P . Par continuité, c'est encore vrai en b .

- Démontrons le lemme : f est non polynomiale, donc elle n'est pas identiquement nulle : il existe $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$.

Si pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f|_{[a,x]}$ est polynomiale, en adaptant la propriété 2, on montre que f est polynomiale sur I , ce qui est faux, donc il existe $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $f|_{[a,x]}$ est non polynomiale.

Sans perte de généralité, on supposera que $x > a$.

Posons $s = \sup\{x \in I \cap [a, +\infty[\mid f_{[a,x]} \text{ est polynomiale}\} : s \text{ existe car l'ensemble est non vide (il contient } a) \text{ et il est majoré par } x$.

D'après la propriété 2, $f_{[a,s]}$ est polynomiale.

— Supposons d'abord que $s = a$. Par continuité de f , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon \in I$ et $f_{[a,a+\varepsilon]}$ ne s'annule jamais. Or $s = a$, donc $f_{[a,a+\varepsilon]}$ n'est pas polynomiale. Le lemme est démontré dans ce cas.

Pour la suite, on suppose que $s > a$.

— Supposons que $f(s) \neq 0$. Par continuité de f , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subset I$ et $f_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}$ ne s'annule jamais. De plus d'après la propriété 1, si $f_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}$ était polynomiale, $f_{[a,s+\varepsilon]}$ serait aussi polynomiale, ce qui contredit la définition de s . Le lemme est démontré dans ce cas.

— Supposons maintenant que $f(s) = 0$.

Notons P le polynôme avec lequel f coïncide sur $[a, s]$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes, pour tout $x \in [a, s]$,

$$f(x) = P(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x-s)^n}{n!} P^{(n)}(s), \text{ donc d'après la formule de Taylor-Young}$$

et l'unicité du développement limité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(s) = P^{(n)}(s)$. Or P est non nul (car $f(a) \neq 0$), donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$f^{(n)}(s) = P^{(n)}(s) \neq 0.$$

Notons alors $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(s) \neq 0\}$. D'après la formule de Taylor-

Young, lorsque h tend vers 0, $f(s+h) = \frac{h^k}{k!}(f^{(k)}(s) + \alpha(h))$, où $\alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $s + \varepsilon \in I$ et tel que pour tout $h \in [0, \varepsilon]$,

$|\alpha(h)| < |f^{(k)}(s)|$. Alors $f_{[s,s+\varepsilon]}$ ne s'annule jamais et elle est non polynomiale d'après la propriété 1 et la définition de s . Alors d'après une variante de la propriété 2, il existe $s' \in]s, s + \varepsilon[$ tel que $f_{[s',s+\varepsilon]}$ est non polynomiale (et ne s'annule jamais). Le lemme est également démontré dans ce cas.

◇ Soit f une application de classe C^∞ , non polynomiale, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous allons construire deux suites (a_N) et (b_N) de réels telles que

- (a_N) est croissante et (b_N) est décroissante;
- pour tout $N \in \mathbb{N}$, $a_N < b_N$ et, $f_{[a_N,b_N]}$ est non polynomiale;
- pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a_N, b_N]$, pour tout $n \leq N$, $f^{(n)}(x) \neq 0$.

Initialisation : D'après le lemme, il existe a_0, b_0 tel que $a_0 < b_0$, $f_{[a_0,b_0]}$ est non polynomiale et ne s'annule jamais.

Hérédité : Supposons construits $(a_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $(b_n)_{0 \leq n \leq N}$.

$f_{[a_N,b_N]}$ est C^∞ et non polynomiale, donc $f^{(N+1)}|_{[a_N,b_N]}$ est également non polynomiale (sinon par primitives successives, $f_{[a_N,b_N]}$ serait polynomiale). D'après le lemme, il existe $a_{N+1}, b_{N+1} \in [a_N, b_N]$ avec $a_{N+1} < b_{N+1}$ tels que $f^{(N+1)}|_{[a_{N+1},b_{N+1}]}$ est non polynomiale et ne s'annule jamais. Alors $f|_{[a_{N+1},b_{N+1}]}$ est également non polynomiale (sinon par dérivation $f^{(N+1)}|_{[a_{N+1},b_{N+1}]}$ serait polynomiale) et pour tout $n \leq N+1$, $f^{(n)}$ ne s'annule jamais sur $[a_{N+1}, b_{N+1}]$.

◇ La suite (a_N) est croissante et majorée par b_0 , donc elle converge vers $a \in \mathbb{R}$.

De même, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, donc par passage à la limite, $a \leq b$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a, b] \subset [a_n, b_n]$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Ceci démontre que lorsque f est non polynomiale sur $\mathbb{R}$, on a $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{(n_x)}(x) = 0)$, ce qui conclut.