

Feuille d'exercices 19 : Équations différentielles linéaires.

Exercice 19.1 : (niveau 1)

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4e^{2t}$, avec la condition de Cauchy $y(0) = 0$.

Exercice 19.2 : (niveau 1)

Résoudre $(1 + x^2)y'(x) - 2xy(x) = xe^{\frac{1}{1+x^2}}$.

Exercice 19.3 : (niveau 1)

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 10y' + 41y = 170 \sin t$.

Exercice 19.4 : (niveau 1)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x.$$

1°) Montrez que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \geq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

2°) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 19.5 : (niveau 1)

Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2xf(x) = 3 \int_0^x f(t)dt.$$

Exercice 19.6 : (niveau 2)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2,$$

où y est une fonction de x .

1°) Résoudre cette équation différentielle lorsque y est définie sur un intervalle I ne contenant aucun des réels -1 , 0 et 1 .

2°) Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si $x \mapsto y(-x)$ est une solution de (E) .

3°) Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

4°) Déterminer les solutions de (E) sur $] -1, 1[$.

Exercice 19.7 : (niveau 2)

Déterminez les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Exercice 19.8 : (niveau 2)

Résoudre l'équation (E) : $y' = \frac{y}{2t} + \frac{1}{2yt}$.

Indication : On pourra poser $z = y^2$.

Exercice 19.9 : (niveau 2)

Soient b et c deux applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + b(x)y = c(x)$.

1°) Résoudre (E) à l'aide d'intégrales.

2°) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que b et c sont T -périodiques.

a) Montrer qu'une solution y de (E) est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

b) Montrer que (E) possède une unique solution T -périodique si et seulement si

$$\int_0^T b(t)dt \neq 0.$$

Exercice 19.10 : (niveau 2)

Résoudre (E) : $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Exercice 19.11 : (niveau 2)

Résoudre (E) : $(1 + y^2)y' - xy = 0$.

Exercice 19.12 : (niveau 2)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer les applications f de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\lambda - x)$.

Exercice 19.13 : (niveau 2)

Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + xy' - 4y + 4x^2 = 0$.

On pourra utiliser le changement de variable suivant :

$$t = \ln |x|.$$

On précisera quelles sont les solutions définies sur \mathbb{R} en entier.

Exercice 19.14 : (niveau 2)

Résoudre l'équation (E) : $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Exercice 19.15 : (niveau 3)

On note E l'ensemble des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que $f(0) = 0$. Si $f \in E$, on note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $n(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1°) Montrer que N et n sont des normes.

2°) Montrer que N et n sont équivalentes.

Exercice 19.16 : (niveau 3)

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = x^2 + \int_0^x tf(x-t)dt.$$

Exercice 19.17 : (niveau 3)

On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y'' + |y| = 0 \text{ avec } y(0) = a \text{ et } y'(0) = 0.$$

On admettra qu'il possède une unique solution définie sur \mathbb{R} que l'on notera y .

1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \leq a$.

2°) Déterminer y lorsque $a \leq 0$.

Pour la suite, on suppose que $a > 0$.

3°) Montrer que y s'annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$.

4°) Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 19.18 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$, en l'inconnue $y \in E$,

où $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifie $\sum_{k=0}^n a_k X^k = (X - a)^n$.

1°) Montrer que l'opérateur dérivation $D : E \rightarrow E$ défini par $D(f) = f'$ est un endomorphisme sur E .

2°) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $M_\lambda(f)(x) = e^{\lambda x} f(x)$.

Calculer $M_a \circ D \circ M_{-a}$.

3°) Quel est le lien entre l'équation (E) et $\text{Ker}((D - a\text{Id}_E)^n)$?

4°) Calculer $(M_a \circ D \circ M_{-a})^n$ et en déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercices supplémentaires

Exercice 19.19 : (niveau 1)

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $x(xy' + y - x) = 1$.

Exercice 19.20 : (niveau 1)

Résoudre (E) : $y' - y = \sin t$.

Exercice 19.21 : (niveau 1)

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 3t^2y = t^2$, avec la condition de Cauchy $y(0) = 0$.

Exercice 19.22 : (niveau 1)

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' - 8y = 7e^{3t}$.

Exercice 19.23 : (niveau 2)

Résoudre (E) : $yy' + x = 0$.

Exercice 19.24 : (niveau 2)

(E) $x^2y' + y = x^2$ sur \mathbb{R}_+^* . Limite en 0 des solutions.

Exercice 19.25 : (niveau 2)

Résoudre (E) : $2xyy' = x^2 + y^2$, avec $y(1) = 2$.

Exercice 19.26 : (niveau 2)

Résoudre (E) : $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$, sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

Exercice 19.27 : (niveau 2)

Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation (E) : $(\cos x)y' - (\sin x)y + e^{-x} = 0$.

Exercice 19.28 : (niveau 2)

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2 \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = 1.$$

Exercice 19.29 : (niveau 2)

Résoudre l'équation différentielle (E) : $(t^2 + 1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$.

Exercice 19.30 : (niveau 2)

Notons f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$ $f(x) = x^4 \sin(x^{-3})$. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $xy' + 3y = f(x)$.

Exercice 19.31 : (niveau 2)

Résoudre l'équation différentielle réelle suivante : $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$ en utilisant le changement de variable $t = \arctan(x)$.

Exercice 19.32 : (niveau 3)

Le but de l'exercice est de déterminer les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues, non identiquement nulles, s'annulant en au moins un point et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1°) Soit f une solution. Montrer que f est paire, puis qu'elle admet une primitive F impaire.

2°) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(y) = \frac{F(x_0 + y) + F(x_0 - y)}{2F(x_0)}.$$

En déduire que f est de classe C^∞ .

3°) Montrer qu'il existe μ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'''(x) = \mu F(x)$.

4°) Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 19.33 : (niveau 3)

Déterminer les applications f de classe C^1 , de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} , telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
 $f'(-\frac{1}{x}) = f(x)$.