

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 22 : du lundi 31 mars au vendredi 04 avril.

Liste des questions de cours

- 1°) Montrer que la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre.
- 2°) Quelles sont les solutions de l'équation $(H) : y' = a(t)y$? Justifiez.
- 3°) Présenter la méthode de variation de la constante.
- 4°) Résoudre $(E) : y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}}$.
- 5°) Résolution de $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ lorsque l'on dispose d'une solution particulière de l'équation sans second membre qui ne s'annule pas.
- 6°) Etablir les formules donnant les solutions de $(H) : y'' + ay' + by = 0$, où a et b sont des constantes.
- 7°) Résoudre $(E) : y'' - 2y' + y = \operatorname{cht}$.
- 8°) Résoudre $(E) : y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \cos t$.

Thèmes de la semaine

- 1 En révisions :**
le programme précédent sur la dérivation et la convexité
- 2 Équations différentielles linéaires**

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On s'intéresse aux équations différentielles $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$ en l'inconnue y , où I est un intervalle, et où a et b sont deux applications continues de I dans \mathbb{K} .

(H) est l'équation homogène (ou bien l'équation sans second membre, ESSM) associée à (E) .

Problème de Cauchy relatif à (E) et à une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$.

La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H) .

Principe de superposition des solutions.

Solutions de l'équation (H) .

Méthode de variation de la constante.

Existence et unicité au problème de Cauchy.

Pour une équation non résolue de la forme $c(t)y' = a(t)y + b(t)$, lorsque c possède un unique zéro t_0 , raccordement d'une solution à droite de t_0 avec une solution à gauche de t_0 .

2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

2.2.1 Équations à coefficients quelconques

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ où a, b, c sont trois applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

L'équation homogène associée est $(H) : y'' = a(x)y' + b(x)y$.

$S_E = \{y_0 + y/y \in S_H\} = y_0 + S_H$.

Principe de superposition des solutions.

Problème de Cauchy relatif à (E) et à des conditions initiales de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour tout $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y'_0) .

Résolution de (E) lorsque l'on dispose d'une solution particulière de (H) qui ne s'annule pas.

Exemples de raccordements de solutions.

2.2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici, $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$, où $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, et où a et b sont des constantes. L'équation homogène associée est $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

Solutions de (H) en fonction des racines du polynôme caractéristique $\chi = X^2 + aX + b$.

Solution particulière de (E) , lorsque $f(x) = e^{\lambda x}P(x)$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et où P est un polynôme.

2.3 Equations à variables séparables (hors programme)

Théorème de Cauchy-Lipschitz (admis) pour une équation différentielle de la forme $y' = f(t, y)$, où f est une application d'un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ dans \mathbb{K} , continue et telle que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur U .

Équation à variables séparées :

$$a(t) - b(y)y' = 0 \iff \frac{d(A(t) - B(y(t)))}{dt} = 0, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des primitives de } a \text{ et de } b.$$

Équation à variables séparables :

$$a(t)c(y) - b(y)d(t)y' = 0 \iff \frac{a(t)}{d(t)} - y' \frac{b(y)}{c(y)} = 0, \text{ mais il faut gérer les problèmes de "division par 0".}$$

Prévisions pour la semaine prochaine :

Polynômes.