DM 45 : Théorèmes de Baire

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni jeudi 3 avril.

Dans tout ce sujet,

— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
— E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, dont les normes sont indifféremment notées $\|.\|$;
— X est une partie de E et Y est une partie de F.

Partie I : Continuité d'une dérivée

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.
Définir $g(0)$ afin que l'application g soit continue sur $\mathbb{R}$?
Montrer qu'alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et préciser g'.
Montrer que g' n'est pas continue en 0.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ n réels deux à deux distincts.
En utilisant l'application g de la question précédente, construire une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

— f est une dérivée, c'est-à-dire qu'il existe une application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $h' = f$;
— f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$;
— f n'est pas continue en $a_1, \ldots, a_n$.

3°) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans E.
On suppose que f est une dérivée, c'est-à-dire qu'il existe une application h de $\mathbb{R}$ dans E, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $h' = f$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n(x) = n(h(x + \frac{1}{n}) - h(x))$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Le théorème de la limite simple de Baire, établi en dernière question du sujet, permet facilement d'en déduire que si f est une dérivée, alors l'ensemble de ses points de continuité est dense dans $\mathbb{R}$. On ne demande pas de le démontrer.

Partie II : Suites de Cauchy

Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X, on dit que c'est une suite de Cauchy de X si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$.

4°) Montrer que toute suite de Cauchy de X est bornée.

5°) Montrer que toute suite convergente d'éléments de X est une suite de Cauchy.

On dira que X est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge vers un élément de X.
On rappelle que selon le théorème de Bolzano-Weierstrass, lorsque E est de dimension finie, toute suite bornée de E possède au moins une valeur d'adhérence (on ne demande pas de le démontrer).

6°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de X et soit $a \in X$.
Montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $\|x_n - a\| \leq \varepsilon$.

7°) Montrer que si E est de dimension finie, alors E est complet.

Partie III : diamètre et continuité

Lorsque A est une partie non vide de X, le diamètre de A désigne la quantité

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|.$$

8°) En acceptant que $\delta(A) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, montrer que cette définition est correcte.

9°) Soit A et B deux parties de X telles que A est non vide et $A \subset B$.
Montrer que $\delta(A) \leq \delta(B)$.

10°) Soit $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On note $B_o^X(a, r)$ la boule ouverte de X de centre a et de rayon r. Ainsi, $B_o^X(a, r) = \{x \in X \ / \ \|x - a\| < r\}$.
Montrer que $\delta(B_o^X(a, r)) \leq 2r$.

Lorsque f est une application de X dans Y, pour tout $x \in X$, on pose

$$\omega(f, x) = \inf_{V\in\mathcal{V}(x)} \delta(f(V)),$$

où $\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x relatifs à X.

11°) En acceptant que $\omega(f, x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, montrer que cette définition est correcte.

12°) Soit f une application de X dans Y et soit $x_0 \in X$.
Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega(f, x_0) = 0$.

13°) Soit f une application de X dans Y et $\varepsilon > 0$.
Montrer que $\{x \in X \ / \ \omega(x, f) < \varepsilon\}$ est un ouvert relatif de X.

Partie IV : Lemme de Baire

On suppose que X est complet.

14°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que F_n est un fermé non vide relatif de X.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$.
On suppose de plus que le diamètre de F_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X.
b) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que U_n est un ouvert relatif de X qui est dense dans X.
U désigne un ouvert relatif de X que l'on suppose non vide.
Lorsque $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $B_f^X(a,r)$ la boule fermée de X de centre a et de rayon r. Ainsi, $B_f^X(a,r) = \{x \in X \ / \ \|x-a\| \leq r\}$.

15°) Montrer qu'il existe $x_0 \in X$ et $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_f^X(x_0,r_0) \subset U \cap U_0$.

16°) On suppose construits $n+1$ éléments de X, notés $x_0,\dots,x_n$, et $n+1$ réels strictement positifs notés $r_0,\dots,r_n$ tels que, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$,
$B_f^X(x_k,r_k) \subset U_k \cap B_f^X(x_{k-1},r_{k-1})$ et $r_k \leq \dfrac{r_{k-1}}{2}$.
Montrer qu'il existe $x_{n+1} \in X$ et $r_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que
$B_f^X(x_{n+1},r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B_f^X(x_n,r_n)$ et $r_{n+1} \leq \dfrac{r_n}{2}$.

17°) En déduire que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts relatifs de X denses dans X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est une partie de X dense dans X.

18°) Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de fermés relatifs de X qui sont tous d'intérieurs vides (pour la topologie relative à X), alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est une partie de X dont l'intérieur est vide (toujours pour la topologie relative à X).

Les résultats des deux questions précédentes constituent le théorème de Baire.

19°) Montrer que ces deux résultats sont encore vrais si l'on remplace X par un ouvert relatif de X.

Partie V : Théorème de la limite simple de Baire

Dans cette dernière partie, on suppose que X est complet et que $X \neq \emptyset$.
De plus, f désigne une application de X dans Y.
On suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications **continues** de X dans Y telle que, pour tout $x \in X$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
On fixe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
on pose $F_n = \{x \in X \ / \ \forall m \geq n, \ \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon\}$.

20°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un fermé relatif de X.

21°) Montrer que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

22°) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N (pour la topologie relative à X) est non vide.

On peut donc (on ne demande pas de le démontrer) choisir un ouvert non vide W relatif de X tel que $W \subset F_N$.

23°) Montrer que, pour tout $x \in W$, $\|f(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon$.

24°) Soit $x_0 \in W$. Montrer qu'il existe un ouvert U relatif de X, tel que $x_0 \in U \subset W$ et tel que, pour tout $x \in U$, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $\Omega_\varepsilon = \{x \in X \ / \ \omega(x, f) < \varepsilon\}$.

25°) Déduire des questions précédentes, que pour tout $\varepsilon > 0$, Ω_ε est non vide.

26°) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que Ω_ε est dense dans X.

27°) On note C l'ensemble des $x \in X$ tels que f est continue en x.
Montrer que C est dense dans X.