Correction du DM 44

Merci de pré-corriger votre devoir, en tenant compte des commentaires qui suivent et en vous référant au corrigé type présent sur le site. Je vous demande ensuite de le scanner page à page, dans le bon sens et de le déposer sur mon site au format .pdf.

1°) Il s'agit ici d'utiliser les résultats suivants du cours, sans les redémontrer : f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

3°) C'est une récurrence délicate, il faut la rédiger précisément et sans précipitation.

8°) Attention à parenthéser correctement les expressions utilisées. Ainsi, la quantité $\Delta_h^n(\Delta_h(f)(x))$ n'a pas de sens. L'écriture correcte est $\Delta_h^n(\Delta_h(f))(x)$, voire plus précisément $[\Delta_h^n(\Delta_h(f))](x)$ (mais cela fait alors beaucoup de parenthèses).

10°) Le fait que $\Delta_h^{n+1}(f)$ est croissante ne suffit pas pour conclure. En effet, on en déduit immédiatement que sur $\mathbb{R}_+$, $\Delta_h^{n+1}(f)(x) \geq \Delta_h^{n+1}(f)(0)$, mais le fait que $\Delta_h^{n+1}(f)(0) = 0$ reste à prouver.

11°) Dans la formule de Taylor, l'écriture $f(b) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots$ est incorrecte car la somme commence en $k = 0$ alors qu'elle doit commencer en $k = 1$. Ainsi, les écritures suivantes sont correctes $f(b) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots$ ou $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots$

16°) On peut prolonger f en a par continuité, mais ensuite "prolonger f' en a" n'a pas de sens. En effet, après prolongement par continuité de f en a, f devient une application définie sur $[a, b[$. Alors $f'(a)$ est défini ou n'est pas défini, mais on ne peut pas "modifier" $f'(a)$.

17°) L'énoncé est équivalent au fait que $\rho_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, mais les tentatives de démonstration directe de ce fait par majoration de $|\rho_n(t)|$ sont en général fausses, si elles utilisent le fait qu'il existe M tel que pour tout x, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, car M dépend a priori de n.