Feuille d'exercices 19.
Correction de quatre exercices

Exercice 19.9 :

1°) Soit y une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Notons (H) l'équation sans second membre associée à (E). Alors d'après le cours, $(H) \Longleftrightarrow y(x) = \lambda e^{-B(x)}$ où $B(x) = \int_0^x b(t)\ dt$.
On applique la méthode de variation de la constante en posant $y(x) = \lambda(x)e^{-B(x)}$. Alors d'après le cours, $(E) \Longleftrightarrow \lambda'(x)e^{-B(x)} = c(x)$, donc la solution générale de (E) est $y(x) = e^{-B(x)}\Big(\int_0^x c(t)e^{B(t)}\ dt + k\Big)$.

2°) a) Si y est T-périodique, on a bien sûr $y(0) = y(T)$.
Réciproquement, supposons que $y(0) = y(T)$.
Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = y(x+T)$. b et c étant T-périodiques, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) + b(x)z(x) = y'(x+T) + b(x+T)y(x+T) = c(x+T) = c(x)$, donc z est solution de (E) et elle vérifie $z(0) = y(T) = y(0)$. Ainsi z et y sont deux solutions d'un même problème de Cauchy associé à (E), donc y et z sont égales. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = z(x) = y(x+T)$, donc y est T-périodique.

b) Soit y une solution de (E). D'après la question 1, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^{-B(x)}\Big(\int_0^x c(t)e^{B(t)}\ dt + k\Big)$. Alors y est T-périodique si et seulement si $(1)\ :\ y(0) = y(T)$.
$(1) \Longleftrightarrow k = e^{-B(T)}\Big(\int_0^T c(t)e^{B(t)}\ dt + k\Big) \Longleftrightarrow k(1 - e^{-B(T)}) = e^{-B(T)}\int_0^T c(t)e^{B(t)}\ dt$.
Supposons que $B(T) \neq 0$, où $B(T) = \int_0^T b(t)\ dt$. Alors $1 - e^{-B(T)} \neq 0$,
donc $(1) \Longleftrightarrow k = \dfrac{e^{-B(T)}\int_0^T c(t)e^{B(t)}\ dt}{1 - e^{-B(T)}}$, donc (E) admet une unique solution T-périodique.
Supposons que $B(T) = 0$. Alors $(1) \Longleftrightarrow 0 = \int_0^T c(t)e^{B(t)}\ dt$. Cette condition ne dépend plus de k. Si $\int_0^T c(t)e^{B(t)}\ dt \neq 0$, alors il n'existe aucun $k \in \mathbb{R}$ tel que (1), donc

(E) n'admet aucune solution T-périodique. Si $\int_0^T c(t)e^{B(t)}\,dt = 0$ alors (1) est vérifié pour tout $k \in \mathbb{R}$, donc toutes les solutions de (E), en nombre infini sont T-périodiques. En conclusion, il existe une unique solution T-périodique de (E) si et seulement si $\int_0^T b(t)\,dt \neq 0$.

Exercice 19.14 :

Notons $(H) : y'' + 6y' + 9y = 0$. Il s'agit de l'équation homogène associée à (E).
Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 + 6X + 9 = (X+3)^2$, donc $t \longmapsto e^{-3t}$ est une solution de (H) qui ne s'annule jamais.
Soit y une application deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Conformément au cours, on va résoudre (E) en posant $y(t) = \lambda(t)e^{-3t}$. Ainsi,
$(E) \Longleftrightarrow 9\lambda e^{-3t} + 6(\lambda' - 3\lambda)e^{-3t} + e^{-3t}(\lambda'' - 3\lambda' - 3(\lambda' - 3\lambda)) = \dfrac{e^{-3t}}{\sqrt{1+t^2}}$, donc
$(E) \Longleftrightarrow \lambda'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \ \lambda' = \mathrm{argsh}(t) + \alpha$.
Par intégration par parties,
$\displaystyle\int \mathrm{argsh}(t)\,dt = t\mathrm{argsh}(t) - \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = t\mathrm{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2} + \beta$,
donc $(E) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ \lambda(t) = t\mathrm{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2} + \alpha t + \beta$, puis
$(E) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = e^{-3t}(\alpha t + \beta + t\mathrm{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2})$.

Exercice 19.16 :

$\diamond$ **Lemme :** Soit g et h deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $f = g \Longleftrightarrow (f' = g'$ et $f(0) = g(0))$.
En effet, le sens direct est évident, et si $f' = g'$ et $f(0) = g(0)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = g(0) + \int_0^x g'(t)\,dt = g(x)$.
$\diamond$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons (E) l'équation fonctionnelle de l'énoncé. En posant $u = x - t$ dans l'intégrale, on obtient :
$(E) \Longleftrightarrow f(x) = x^2 + \int_0^x (x-u)f(u)\,du$, donc
$(E) \Longleftrightarrow f(x) = x^2 + x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du$.
$\diamond$ Supposons que f est solution de (E). Alors $x \longmapsto \int_0^x f(u)\,du$ et $x \longmapsto \int_0^x uf(u)\,du$ sont de classe C^1, donc f est aussi de classe C^1. Mais alors $x \longmapsto \int_0^x f(u)\,du$ et $x \longmapsto \int_0^x uf(u)\,du$ sont de classe C^2, donc f est de classe C^2. Ainsi, on peut se contenter de rechercher les solutions de (E) parmi les fonctions de classe C^2.
$\diamond$ Soit donc f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le lemme,

$(E) \iff [f(0)=0$ et $f'(x) = 2x + xf(x) + \displaystyle\int_0^x f(u)\ du - xf(x)]$, puis en utilisant à nouveau le lemme, $(E) \iff [f(0)=0, f'(0)=0$ et $f''(x) = 2 + f(x)]$.
Notons $(F) : f'' = 2 + f \iff (f+2)'' = f+2$.
D'après le cours, $(F) \iff f+2 = A\text{ch}x + B\text{sh}x$. Alors
$(E) \iff [\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\text{ch}x + B\text{sh}x - 2$ et $0 = A-2, 0 = B]$,
donc $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2(\text{ch}x - 1)$.

Exercice 19.17 :

1°) $y'' = -|y| \le 0$ donc y' est une application décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $y'(0) = 0$, donc y' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	
$y(x)$		$\nearrow$	a	$\searrow$	

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}\ \ y(x) \le a$.

2°) Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \le 0$, donc $y''(x) - y(x) = 0$.
On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \alpha ch(x) + \beta sh(x)$. Or $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$, donc $\alpha = a$ et $\beta = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y = ach(x)}$.

3°) $\diamond$ Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y(x) > 0$. Alors $y_{/\mathbb{R}_+}$ est solution de l'équation différentielle $f'' + f = 0$, donc il existe $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y(x) = A\cos(x+\varphi)$, mais c'est impossible car l'application $x \longmapsto \cos(x+\varphi)$ n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi y prend des valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b_+ > 0$ tel que $y(b_+) = 0$.
$\diamond$ Supposons qu'il existe $c_+ \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(c_+) = 0$ avec $c_+ \ne b_+$. y étant monotone sur $[b_+, c_+]$, elle est constante sur cet intervalle, donc $y'(b_+) = 0 = y'(0)$, mais y' est monotone sur $[0, b_+]$, donc elle est constante sur cet intervalle. On en déduit que $0 = y''(0) = -|y(0)| = -a$, ce qui est faux.
On a donc montré qu'il existe un unique $b_+ > 0$ tel que $y(b_+) = 0$.
De même, on montre qu'il existe un unique $b_- < 0$ tel que $y(b_-) = 0$.

4°) On dispose ainsi du tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		b_-		0		b_+		$+\infty$
$y'(x)$			$+$		0		$-$		
$y(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	

$\diamond$ Pour tout $x \in [b_-, b_+]$, $y''(x) + y(x) = 0$, donc il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in [b_-, b_+]$, $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
$y(0) = a$ et $y'(0) = 0$, donc $A = a$ et $B = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [b_-, b_+]$, $y(x) = a\cos(x)$.
Or, $y(b_+) = 0$ et, pour tout $x \in [0, b_+[$, $y(b_+) > 0$, donc $b_+ = \frac{\pi}{2}$. De même, $b_- = -\frac{\pi}{2}$.
$\diamond$ Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $y''(x) - y(x) = 0$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $y(x) = \alpha\text{sh}x + \beta\text{ch}x$.
y est continue et dérivable en $\frac{\pi}{2}$, or sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $y(x) = a\cos x$,

donc $0 = y(\frac{\pi}{2}) = \alpha \mathrm{sh}\frac{\pi}{2} + \beta \mathrm{ch}\frac{\pi}{2}$: (1).
De plus, $-a = -a\sin(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = \alpha \mathrm{ch}\frac{\pi}{2} + \beta \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}$: (2).
En formant $(2) \times \mathrm{ch}\frac{\pi}{2} - (1) \times \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha = -a\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}$, d'où l'on déduit que $\beta = a\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $y(x) = a(-\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\mathrm{sh}x + \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\mathrm{ch}x) = a\mathrm{sh}(\frac{\pi}{2} - x)$.

◇ Un calcul analogue sur $]-\infty, -\frac{\pi}{2}]$ montre que $\boxed{y(x) = \begin{cases} a\mathrm{sh}(x + \frac{\pi}{2}) & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\cos(x) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ a\mathrm{sh}(\frac{\pi}{2} - x) & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}}$

.